

MÉCANIQUE DES ÉCOULEMENTS COMPRESSIBLES

Flavio Noca

ECOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

21 mai 2025

Table des matières

1	Introduction	7
1.1	Compressibilité d'un fluide	7
1.2	Compressibilité et mouvement d'un fluide	8
1.3	Outils pour l'étude de la compressibilité au sein des ondes et des écoulements	8
1.4	Structure du cours	9
2	Eléments de thermodynamique	11
2.1	Premier principe de la thermodynamique	11
2.1.1	Variables thermodynamiques	11
2.1.2	Formulation du premier principe	12
2.1.3	Formulation alternative du premier principe	13
2.1.4	Chaleurs spécifiques	14
2.2	Second principe de la thermodynamique	16
2.2.1	Entropie	16
2.2.2	Formulation du second principe	16
2.3	Transformations thermodynamiques	17
2.3.1	Relations thermodynamiques	17
2.3.2	Calcul de la variation d'entropie	19
2.3.3	Transformation isentropique	19
2.3.4	Vitesse du son	19
2.3.5	Compressibilité	20
2.4	Propriétés thermodynamiques des gaz parfaits	22
2.4.1	Définition	22
2.4.2	Conséquences de l'équation des gaz parfaits	22
2.4.3	Transformation isentropique	24
2.4.4	Vitesse du son	25
2.4.5	Compressibilité d'un gaz parfait en écoulement isentropique	25
3	Equations fondamentales	27
3.1	Equations de conservation	27
3.1.1	Conservation de la masse	27
3.1.2	Conservation de la quantité de mouvement	27
3.1.3	Conservation de l'énergie	30
3.2	Equations d'état	31
3.2.1	Equation d'état reliant p , T , et ρ	32
3.2.2	Equation d'état pour e ou h	32
3.3	Sens physique de la vitesse du son	33
4	Principes fondamentaux des écoulements isentropiques permanents	35
4.1	Ondes de Mach	35
4.2	Equations de conservation en écoulement isentropique	39
4.2.1	Conservation de la quantité de mouvement : relation de Bernoulli	39
4.2.2	Conservation de l'énergie	40
4.2.3	Comparaison des deux équations	40
4.3	Grandeurs caractéristiques d'un écoulement isentropique	40
4.3.1	Grandeurs d'arrêt, de réservoir, de stagnation, et totales	40
4.3.2	Grandeurs statiques	41
4.3.3	Grandeurs soniques	41
4.4	Relation entre la vitesse et le nombre de Mach en écoulement isentropique	42
4.5	Ecoulement isentropique d'un gaz parfait	43

4.5.1	Conservation de quantité de mouvement : relation de Bernoulli	43
4.5.2	Conservation d'énergie	43
4.5.3	Calcul des grandeurs statiques en fonction des grandeurs totales	43
4.5.4	Formulation en fonction de la vitesse du son	44
4.5.5	Formulation en fonction des grandeurs soniques	45
4.5.6	Calcul des grandeurs statiques en fonction des grandeurs soniques	45
4.5.7	Détente dans le vide	46
4.6	Quand un écoulement est-il compressible ?	47
4.7	Mesures en écoulements compressibles et isentropiques	48
5	Ecoulements quasi-unidimensionnels isentropiques permanents	51
5.1	Equations de conservation quasi-unidimensionnelles	51
5.1.1	Conservation de la masse	52
5.1.2	Conservation de la quantité de mouvement	53
5.1.3	Conservation de l'énergie	54
5.1.4	Résumé des équations pour un écoulement quasi-unidimensionnel permanent isentropique	54
5.2	Ecoulement dans un tube de section variable	54
5.2.1	Effets de la variation de section	54
5.2.2	Conditions au col	56
5.2.3	Relation entre une section et la section au col	57
5.2.4	Débit-masse	58
5.3	Ecoulement dans une tuyère	59
5.3.1	Tuyère convergente et blocage sonique	59
5.3.2	Tuyère convergente-divergente ou de Laval	60
6	Introduction aux ondes de choc et de détente	61
6.1	Introduction	61
6.1.1	Chocs droits	63
6.1.2	Chocs obliques	63
6.1.3	Ondes de compression et ondes de détente	64
6.1.4	Ondes de choc et de détente dans d'autres contextes	65
6.2	Formation d'ondes de choc et de détente	67
6.2.1	Approche pragmatique : piston accéléré dans un fluide au repos	67
6.2.2	Approche théorique	72
7	Ondes de choc droites	77
7.1	Equations de conservation pour les ondes de choc	77
7.1.1	Choix du référentiel	77
7.1.2	Volume de contrôle	78
7.1.3	Conservation de la masse	79
7.1.4	Conservation de la quantité de mouvement	79
7.1.5	Conservation de l'énergie	80
7.1.6	Entropie	81
7.2	Propriétés des ondes de choc	81
7.2.1	Equation de Rankine-Hugoniot	82
7.2.2	Variation d'entropie à travers un choc faible	82
7.3	Relations entre variables thermodynamiques de part et d'autre du choc pour un gaz parfait	83
7.3.1	Accroissement d'entropie à travers un choc	85
7.3.2	Relation de Rankine-Hugoniot	86
7.3.3	Relations entre les vitesses de part et d'autre du choc	87
7.3.4	Pression totale et col sonique de part et d'autre du choc	88

8 Ondes de choc obliques	89
8.1 Equations de conservation pour les ondes de choc obliques	89
8.1.1 Volume de contrôle	89
8.1.2 Conservation de la masse	90
8.1.3 Conservation de la quantité de mouvement	91
8.1.4 Conservation de l'énergie	91
8.1.5 Entropie	92
8.2 Géométrie	92
8.2.1 Interprétation Galiléenne des ondes de chocs obliques	92
8.3 Relations entre variables thermodynamiques de part et d'autre du choc oblique	93
8.3.1 Equivalence avec les ondes de choc droites	93
8.3.2 Condition d'existence	93
8.3.3 Relations thermodynamiques pour un gaz parfait	93
8.3.4 Géométrie	94
8.4 Phénomènes associés aux chocs	96
8.4.1 Choc attaché et choc détaché	96
8.4.2 Ecoulement supersonique autour de dièdres	97
8.4.3 Réflexion et interaction des chocs	97
9 Ecoulement de Prandtl-Meyer	101
9.1 Ondes de chocs obliques d'intensité infinitésimale	101
9.2 Compression et détente isentropes	103
9.2.1 Variation infinitésimale à travers une ligne de Mach	103
9.2.2 Relations de Prandtl-Meyer	104
9.3 Ondes de détente	105
9.3.1 Ondes de compression	106
10 Méthode des caractéristiques	107
10.1 Equations de conservation	107
10.1.1 Forme générale	107
10.2 Ecoulements irrotationnels	108
10.2.1 Nouvelle formulation des équations de conservation pour les écoulements bidimensionnels, irrotationnels	108
10.2.2 Caractéristiques de l'écoulement	111
10.3 Méthode de calcul des caractéristiques	112
A Vector and Tensor Identities	119
A.1 Operations with vectors	119
A.2 Operations with tensors	120
A.3 Operations with anti-symmetric tensors W	121
A.4 Operations with symmetric tensors S	121
A.5 Operations with dyadics	122
A.6 Operations with the unit tensor I	122
A.7 Operations with vectors, dyadics, and tensors that use the position vector	123
A.7.1 Operations with one position vector	123
A.7.2 Operations with one arbitrary vector and one position vector	123
A.7.3 Operations with two arbitrary vectors and one position vector	123
A.7.4 Operations with tensors and one position vector	124
B Thermodynamics : Maxwell Equations and Jacobians	125
B.1 Mathematics	125
B.2 Maxwell Equations	126
B.3 Jacobian methods	127
B.4 Measurable quantities	129
B.5 Speed of sound	129
B.6 Meyer equation	130
B.7 Joule-Thomson coefficient	130

C	Chaleurs Spécifiques	133
C.1	Eléments de physique statistique et quantique	133
C.1.1	Degrés de liberté d'une molécule	133
C.1.2	Energie et enthalpie interne d'un gaz	133
C.1.3	Chaleurs spécifiques et γ	134
C.1.4	Gaz monoatomique	134
C.1.5	Gaz formé de molécules complexes	134
C.1.6	Gaz général	135
C.1.7	Gaz diatomique	135
C.1.8	Gaz triatomique	136
D	Ecoulements et Débit Massique dans une Tuyère	137
D.1	Conditions à la sortie d'une tuyère	137
D.2	Débit massique en écoulement isentropique	138
D.2.1	Débit massique en fonction du nombre de Mach	138
D.2.2	Débit massique en fonction de la pression	138
D.2.3	Représentation graphique et valeurs soniques	139
D.3	Ecoulement dans une tuyère convergente	140
D.4	Tuyère convergente-divergente ou de Laval	141
E	Ondes de détentes sur les profils aérodynamiques et dans les tuyères	145
E.1	Ecoulements supersoniques autour de profils	145
E.1.1	Portance et traînée	145
E.1.2	Ecoulement autour d'une plaque plane	146
E.1.3	Ecoulement autour d'un profil en losange	147
E.2	Ecoulements supersoniques en sortie de tuyère	147
E.2.1	Ecoulements en sortie	147
E.2.2	Sillage des tuyères	148
F	Formulaire	151

Chapitre 1

Introduction

1.1 Compressibilité d'un fluide

Selon le dictionnaire Larousse, la *compressibilité* est la ‘propriété qu’ont les corps de diminuer de volume sous l’effet d’une augmentation de pression.’ En mécanique des fluides, la compressibilité est un paramètre caractérisant la *variabilité de la masse volumique* (ou densité) ou de son inverse, le *volume spécifique* (volume par unité de masse). Pour une particule de fluide, qui par définition a une masse fixe, un changement de masse volumique correspond donc bien à un changement de volume. De ce fait, il faudrait préférentiellement parler d’écoulement *isochore* (masse volumique constante) et *isovolumique* (volume spécifique constant), ou *non-isochore* et *non-isovolumique*.

Le langage courant au fil du temps a forcé le choix sur le terme *compressible* au lieu de *non-isochore*.

Pour un fluide simple au repos (en condition hydrostatique), la masse volumique ne dépend que de deux autres variables thermodynamiques (le Chapitre 2 sur les *Eléments de Thermodynamique* établit la définition d’un système simple, pour lequel toute variable d’état thermodynamique n’est fonction que de deux autres variables d’état).

Il est possible de choisir de la pression p et la température T comme variables indépendantes. Ainsi toute variation infinitésimale de masse volumique ρ ou de volume spécifique $v = 1/\rho$ par rapport à sa valeur d’équilibre peut s’écrire :

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dv}{v} = \alpha_T dp - \beta_p dT = (\alpha_T \cdot p) \frac{dp}{p} - (\beta_p \cdot T) \frac{dT}{T} \quad (1.1)$$

où α_T est le coefficient de compressibilité isotherme (à température constante) et β_p le coefficient d’expansion ou de dilatation thermique isobare :

$$\alpha_T = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T, \quad \beta_p = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \quad (1.2)$$

L’inverse de α_T est dénoté module d’élasticité isotherme (en anglais, *isothermal bulk modulus*) :

$$K_T = \frac{1}{\alpha_T} \quad (1.3)$$

Pour deux fluides classiques, l’air et l’eau, les valeurs des coefficients à pression et température ambiantes prennent les valeurs suivantes :

Coefficient	Name	Air	Eau
$\alpha_T \cdot p_0$	Compressibilité isotherme	1	4.6×10^{-5}
$\beta_p \cdot T_0$	Dilatation thermique	1	0.061

TABLE 1.1 – Compressibilité de l’air et l’eau à $T_0 = 293$ K et $p_0 = 1$ atm (Sherman F. S., *Viscous flow*, McGraw-Hill, 1990).

La variation de volume ou de masse volumique n’est donc pas seulement le résultat d’une variation de pression comme le sous entend le mot *compressibilité*. La variation de volume peut également intervenir à cause d’une variation de température (comme dans un thermomètre) ou tout autre variable d’état comme l’entropie, l’enthalpie, et l’énergie interne (cf Chapitre 2). Tout fluide est donc compressible. Une variation de la pression et/ou de la température engendre un changement de masse volumique. Pour les liquides, la variation de pression requise pour atteindre un certain pourcentage de variation de la masse volumique est plus élevée que pour un gaz. Cependant, les phénomènes physiques associés à la compressibilité sont les mêmes, quel que soit le fluide, sous forme liquide ou gazeuse.

1.2 Compressibilité et mouvement d'un fluide

La compressibilité d'un fluide intervient en *hydrostatique*, comme pour le cas de l'air dans un pneu. La masse volumique de l'eau des océans varie avec la profondeur, quoique très faiblement, tandis qu'à l'opposé la masse volumique de l'air de l'atmosphère peut varier sur plusieurs ordres de grandeurs avec l'altitude.

Ce cours porte sur la compressibilité associée au *mouvement* de fluides.

Dans le cas d'*ondes acoustiques*, les variations de masse volumique sont très faibles. Cependant, ces variations de masse volumique infinitésimales sont la clé pour la propagation de ces ondes sonores. A ces variations périodiques de masse volumique sont associés des oscillations périodiques de particules de fluide autour d'une position fixe, sans qu'il y ait un net déplacement du fluide. La vitesse de déplacement du fluide au sein de l'onde est très inférieure à la vitesse de propagation a de l'onde.

Pour les *écoulements* (avec un transport net de fluide), l'importance de la compressibilité dépend de plusieurs paramètres. Dans certains cas, comme pour l'écoulement de l'air autour d'une voiture, les petites variations de masse volumique n'ont pas d'influence sur l'écoulement. L'écoulement est alors dit *incompressible*. Quand les variations de masse volumique influent sur l'écoulement, on le dit *compressible*.

Des variations de température, et donc de la masse volumique, peuvent engendrer un mouvement de fluide dans un champ gravitationnel. Ces phénomènes dits de *convection* sont associés à des vitesses d'écoulements aussi bien faibles (eau chauffée dans une casserole) qu'élevées (ouragans dans l'atmosphère).

Même en l'absence de champs de forces externes, la compressibilité d'un écoulement peut être influente, selon sa vitesse u par rapport à la vitesse a des ondes acoustiques. Ce rapport est appelé *nombre de Mach* et dénoté M :

$$M = \frac{u}{a}. \quad (1.4)$$

Sans l'effet de forces externes, l'écoulement est *incompressible* pour $M \lesssim 0.3$, et *compressible* pour $M \gtrsim 0.3$. En particulier, pour $0.3 \lesssim M < 1$, il est *subsonique*, pour $M \sim 1$ *transonique*, pour $M > 1$ *supersonique*, et pour $M \gg 1$ *hypersonique*. Une grande variété de phénomènes (ondes de chocs, par exemple) peuvent apparaître dans un écoulement selon la valeur du nombre de Mach.

Ce cours se focalisera sur les ondes acoustiques et les écoulements à grand nombre de Mach, qui ont pour dénominateur commun la vitesse du son (Thompson, 1972).

1.3 Outils pour l'étude de la compressibilité au sein des ondes et des écoulements

Le fluide peut être représenté par ses constituants (atomes et molécules). Des équations de physique et chimie statistiques comme celles de Boltzmann sont alors nécessaires pour la description macroscopique du fluide. Pour des situations de gaz raréfiés (faible densité, comme pour la rentrée atmosphérique) ou à l'échelle nanométrique, des simulations au niveau moléculaire sont envisageables.

Dans ce cours, l'hypothèse est faite d'un milieu continu. L'écoulement du fluide peut alors être décrit par des modèles de milieux continus, comme les équations de Navier-Stokes.

Si la masse volumique reste constante, il ne peut y avoir d'ondes acoustiques, et l'écoulement du fluide est dit incompressible. L'écoulement peut être alors décrit par l'équation de conservation de la masse et les équations de conservation de la quantité de mouvement. La pression varie, mais la masse volumique peut être considérée comme constante dans les équations. Un exemple classique est celui de l'écoulement de l'eau. Pour un gaz où les variations de pression sont du même ordre de grandeur que les variations de masse volumique (en particulier pour les gaz parfaits), comment est-il possible de considérer l'écoulement comme incompressible (c'est à dire sans variations de masses volumique malgré des variations de pression)? De manière analogue, jusqu'à quelle vitesse l'écoulement de l'eau peut-il être considéré comme incompressible?

Pour les ondes acoustiques et les écoulements compressibles, une équation de conservation supplémentaire est nécessaire puisque la masse volumique intervient comme une nouvelle variable. Cette équation est obtenue en appliquant la conservation de l'énergie aux particules de fluide. D'autres équations dites *constitutives* sont nécessaires, car l'énergie doit être exprimée en fonction de variables d'état mesurables comme la température et la pression.

1.4 Structure du cours

Le Chapitre 2 introduit quelques notions de thermodynamique fondamentales pour le développement de la théorie des écoulements compressibles.

Le Chapitre 3 établit les équations de mécanique des fluides nécessaires à l'étude des écoulements compressibles sont présentées.

Le Chapitre 4 présente la théorie des écoulements isentropes permanents. Cette théorie est appliquée au Chapitre 5 pour l'analyse de l'écoulement quasi-monodimensionnel permanent de gaz parfaits dans les tuyères.

Le Chapitre 6 est dédié à une introduction sur les ondes de choc et de détente.

Le Chapitre 7 traite de manière plus détaillée les ondes de choc droites, tandis que le Chapitre 8 présente la théorie des ondes de chocs obliques.

Le Chapitre 9 décrit les écoulements de Prandtl-Meyer, permettant des compressions et des détentes isentropes.

Le Chapitre 10 présente une introduction aux écoulements bidimensionnels par l'intermédiaire de la méthode des caractéristiques.

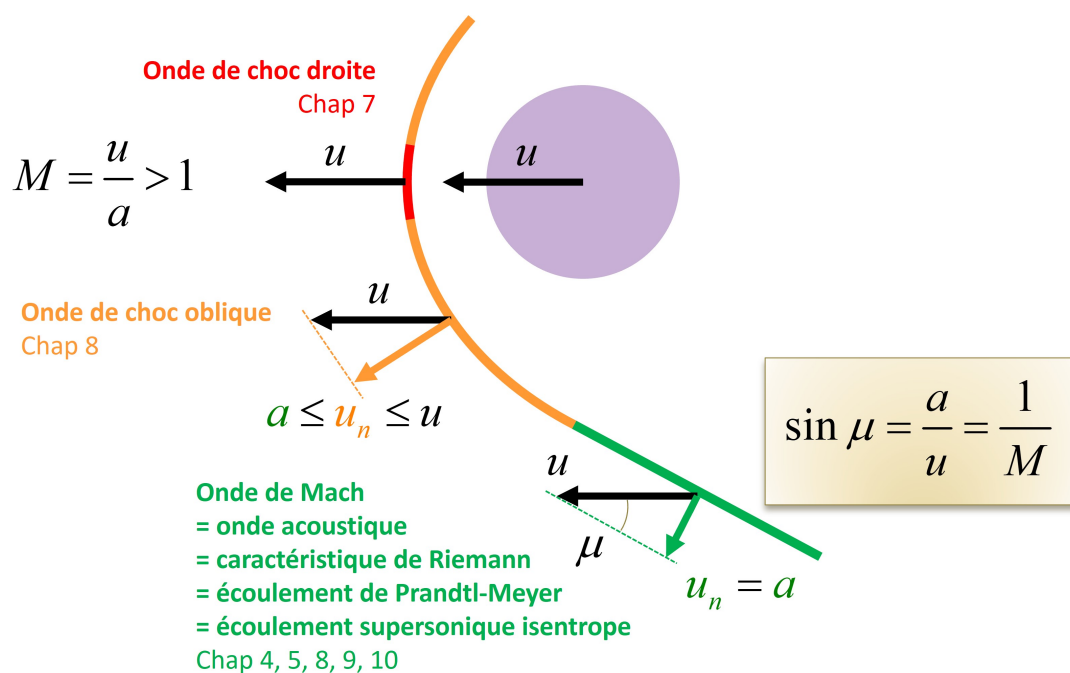


FIGURE 1.1 – Écoulement autour d'un corps sphérique se déplaçant supersoniquement

Chapitre 2

Eléments de thermodynamique

Ce Chapitre est un bref rappel de quelques notions de thermodynamique, qui seront nécessaires pour l'étude des écoulements compressibles. Les ouvrages dans la bibliographie permettent de compléter le contenu de ce Chapitre (Borel and Favrat, 2005; Borgnakke and Sonntag, 2019; Cengel et al., 2019; Moran et al., 2019).

2.1 Premier principe de la thermodynamique

2.1.1 Variables thermodynamiques

La thermodynamique est décrite par les *variables d'état* et les *grandeurs de parcours*, ainsi que les lois qui les relient.

Variable d'état Une *variable d'état* ('state function') est une quantité qui peut être mesurée (ou évaluée, si la loi est connue) en un point et en un instant donnés. Le nom dérive du verbe *être*, et décrit donc la 'manière d'être d'un corps' (dictionnaire Le Robert). Des exemples de variables d'état pour un fluide sont la pression p , la température T , et la masse volumique (ou densité) ρ .

Une propriété fondamentale d'une variable d'état est que son intégrale entre deux états distincts 1 et 2 du système ne dépend pas de la transformation entre ces états mais uniquement des états eux mêmes, soient les états initial et final de la transformation. En particulier une variable d'état ψ a pour propriété :

$$\begin{aligned}\int_1^2 d\psi &= \psi_2 - \psi_1, \\ \oint d\psi &= 0,\end{aligned}\tag{2.1}$$

où le symbole d indique une *différentielle totale* ou *exacte*, parfois aussi appelée *forme* ou *1-forme différentielle* ou *exacte*.

Grandeur de parcours Une *grandeur de parcours* ('path function') est une quantité qui dépend de l'histoire du système et non pas de son état actuel uniquement. Elle ne donne aucune information directe sur l'état actuel du système.

Pour une grandeur de parcours ϕ , les relations (2.1) ne sont pas vérifiées et s'écrivent cette fois sous la forme

$$\begin{aligned}\int_1^2 \delta\phi &\neq \phi_2 - \phi_1, \\ \oint \delta\phi &\neq 0,\end{aligned}\tag{2.2}$$

où le symbole δ est distinct du symbole d , car il n'est pas une différentielle totale/exacte. Ce symbole est parfois représenté comme \tilde{d} ou tout simplement d si la quantité est bien comprise comme grandeur de parcours (Liepmann and Roshko, 1957).

Pour illustrer le concept de variable d'état et de grandeur de parcours, l'exemple de l'alpiniste gravissant une montagne est couramment utilisé (Borel and Favrat, 2005). La variable d'état z (altitude) ne dépend que de sa position actuelle alors que le chemin qu'il a suivi pour rejoindre deux points de son

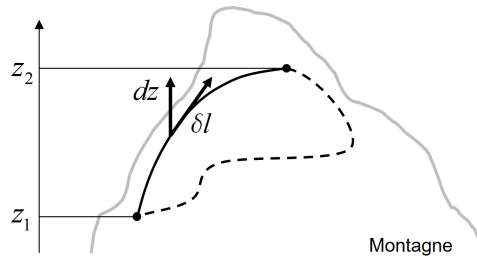


FIGURE 2.1 – Variable d'état (altitude z) et grandeur de parcours (longueur du chemin parcouru l) (Borel and Favrat, 2005).

ascension est quelconque. Le dénivelé $z_2 - z_1$ est indépendant du chemin parcouru, alors que la distance parcourue l (grandeur de parcours) dépend du chemin emprunté par l'alpiniste. De plus, si l'alpiniste revient à sa position de départ, la différence d'altitude est nulle alors que le chemin suivi est de longueur non nulle, illustrant ainsi les propriétés (2.1) et (2.2).

Système simple Un système est dit simple si et si seulement toute variable d'état le décrivant est entièrement définie par sa composition chimique, sa masse m , et deux autres variables d'état indépendantes.

Un système monophasique, fermé, dont la composition chimique et la masse m sont connues, en équilibre thermique et mécanique, est généralement simple.

Par conséquent, si ψ_1 , ψ_2 , et ψ_3 sont des variables d'état indépendantes, un système simple permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \psi_1(\psi_2, \psi_3), \\ d\psi_1 &= \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \psi_2} \right)_{\psi_3} d\psi_2 + \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \psi_3} \right)_{\psi_2} d\psi_3. \end{aligned} \quad (2.3)$$

2.1.2 Formulation du premier principe

Une particule de fluide est par définition un système fermé. Un système fermé implique que sa masse est constante, et qu'il n'y a donc pas de transfert de masse à travers la surface délimitant le système. Les transferts d'énergie (conduction, rayonnement et énergie mécanique) sont autorisés. La particule est supposée être chimiquement inerte. D'après le premier principe, la somme de l'énergie fournie sous forme de chaleur δQ et de travail δW à une masse m de fluide est égale à la variation de son énergie totale dE_t :

$$dE_t = \delta Q + \delta W \quad (2.4)$$

Comme la masse d'une particule de fluide est invariante par définition, il est possible de normaliser l'équation par la masse du système et utiliser des symboles en lettres minuscules pour représenter des quantités massiques (par unité de masse), selon la Figure 2.2 :

$$de_t = \delta q + \delta w \quad (2.5)$$

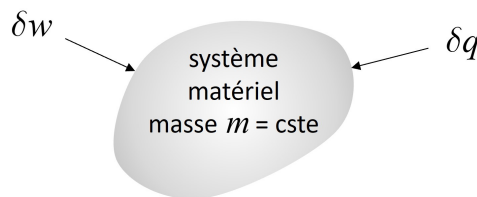


FIGURE 2.2 – Particule de fluide considérée comme un système fermé de masse constante et chimiquement inerte.

Le premier principe exprimé pour la particule de fluide de masse fixe s'écrit alors sous la forme :

$$de_t = de + de_{cin} + de_{pot} = \delta q + \delta w, \quad (2.6)$$

ce qui traduit le principe général de conservation de l'énergie. A noter que l'énergie interne, cinétique et potentielle sont considérées comme des variables d'état.

Dans le restant du cours, les symboles en lettres minuscules représentent des quantités massiques (par unité de masse).

L'énergie totale e_t (en unités J/kg) est la somme de son énergie *interne* e , son énergie cinétique e_{cin} , et son énergie potentielle e_{pot} . Les énergies cinétiques et potentielles sont des énergies macroscopiques, correspondant respectivement à la vitesse de la particule de fluide et à sa position dans un champ de force.

L'énergie interne représente l'énergie contenue dans la particule de fluide à l'échelle moléculaire/atomique. L'énergie interne est composée de :

- Energie d'agitation thermique (ou sensible) : translation atomique/moléculaire, rotation moléculaire, vibration moléculaire, spin nucléaire/électronique
- Energie latente : énergie d'interaction entre atomes/molécules, absorbée ou libérée lors d'un changement de phase gaz-liquide
- Energie chimique : énergie contenue dans les liaisons entre atomes au sein d'une molécule, absorbée ou libérée lors d'une réaction chimique provoquant la formation ou la rupture d'une liaison (comme l'oxygène O_2 donnant naissance à deux atomes O en écoulement hypersonique, ou le carbone C se combinant avec l'oxygène pour former du CO_2 lors d'une réaction de combustion)
- Energie nucléaire, contenue dans les liaisons entre constituants du noyau (protons et neutrons)

Dans ce cours, sauf contre-indication, les fluides sont monophasiques (pas de changement de phase), sont chimiquement inertes, et ne subissent pas de réactions nucléaires. Les variations de l'énergie interne ne se manifestent donc qu'avec des variations de l'énergie de translation atomique/moléculaire, de rotation moléculaire, et de vibration moléculaire.

2.1.3 Formulation alternative du premier principe

L'objectif est de dériver une expression pour le travail mécanique δw qui ne fasse intervenir que des variables d'état.

Le système est représenté dans la Figure 2.3. Il est formé d'un cylindre de volume V et de section S . Le système est homogène et isotrope, et le déplacement du piston se fait de manière *réversible*, c'est à dire sans frottement et lentement (quasi-statique). Par définition, le volume spécifique v du gaz enfermé dans le cylindre et son inverse la masse volumique ρ sont définis par

$$v = \frac{1}{\rho} = \frac{V}{m}, \quad (2.7)$$

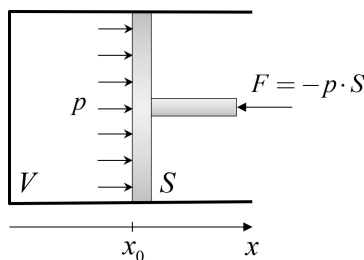


FIGURE 2.3 – Cylindre de section S et volume V

où m est la masse contenue dans le volume V . Puisque le système est fermé, sa masse est constante ce qui permet d'obtenir la relation différentielle

$$dV = m dv. \quad (2.8)$$

La position du piston est x_0 lorsque le volume vaut V_0 . Lorsque le piston se trouve en x , le volume V enfermé dans le cylindre peut être exprimé en fonction de cette variable sous la forme

$$V - V_0 = S(x - x_0), \quad (2.9)$$

ce qui peut s'écrire sous forme différentielle de la manière suivante

$$dV = S dx. \quad (2.10)$$

L'élimination de dV entre les relations (2.8) et (2.10) permet d'obtenir la relation entre un changement infinitésimal de volume massique et de position

$$dx = \frac{m}{S} dv. \quad (2.11)$$

Comme la masse du piston est négligeable, que la pression externe est nulle, que les frottements sont négligés, et que les mouvements sont lents (permettant ainsi d'avoir une pression uniforme au sein du réservoir), la force extérieure F exercée sur le piston est en équilibre avec la force de pression s'exerçant sur la paroi intérieure du piston. Elle est donc égale et opposée à la force de pression, et peut alors s'écrire

$$F = -pS, \quad (2.12)$$

où p est la pression à l'intérieur du système. Par suite, le travail δw par unité de masse pour un déplacement dx s'exprime par

$$\delta w = \frac{F}{m} dx. \quad (2.13)$$

Avec les relations (2.11) et (2.12), l'équation précédente devient

$$\delta w = \frac{F}{m} dx = \frac{(-pS)}{m} \left(\frac{m}{S} dv \right) = -p dv. \quad (2.14)$$

Ainsi, pour un processus *réversible* (lent et sans frottements), l'expression de la variation de travail massique δw s'exprime uniquement en fonction de variables d'état avec une différentielle totale dv . Le résultat obtenu (2.14) peut être inséré dans l'expression du premier principe (2.6), ce qui produit une expression valable uniquement pour un processus réversible (les énergies cinétique et potentielle sont également négligées)

$$de_t = de = \delta q + \delta w = \delta q - p dv. \quad (2.15)$$

Il ne restera plus qu'à trouver une expression pour δq qui, elle aussi, ne soit fonction que de variables d'état. Ceci se fera avec l'utilisation du second principe de la thermodynamique et d'une nouvelle variable d'état, l'entropie,

Remarque Le remplacement de δw par $-p dv$ nécessite que le processus soit réversible, c'est à dire lent et sans frottements. En particulier, le déplacement doit être suffisamment lent pour que la pression soit uniforme dans le volume V . Si le déplacement était rapide, alors des phénomènes instationnaires pourraient se produire, avec une variation spatiale de la pression au sein du volume.

2.1.4 Chaleurs spécifiques

Tout transfert de chaleur δq entre le système et l'extérieur implique une variation de sa température. La chaleur spécifique c d'un gaz est définie par la relation

$$c = \frac{\delta q}{dT}. \quad (2.16)$$

Or, q n'est pas une variable d'état. Il est possible de spécifier la transformation au cours de laquelle la grandeur δq est échangée afin que la chaleur spécifique soit une variable d'état. Si les énergies potentielle et cinétique sont négligées, $de_t \simeq de$, la relation (2.15) s'écrit

$$\delta q = de + p dv, \quad (2.17)$$

qui, après division par dT , devient

$$c = \frac{\delta q}{dT} = \frac{de}{dT} + p \frac{dv}{dT}. \quad (2.18)$$

Les chaleurs spécifiques usuelles sont à pression constante c_p et à volume constant c_v , et sont définies par

$$c_p = \left(\frac{\delta q}{dT} \right)_p, \quad (2.19)$$

$$c_v = \left(\frac{\delta q}{dT} \right)_v.$$

Puisque le système est simple, l'énergie interne e peut être exprimée uniquement en fonction de la température T et du volume massique v par

$$e = e(v, T), \quad (2.20)$$

qui devient à l'aide de la relation différentielle (2.3) puis de la relation (2.17)

$$de = \left(\frac{\partial e}{\partial v} \right)_T dv + \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_v dT = \delta q - p dv. \quad (2.21)$$

Avec cette relation et en vertu des définitions (2.19) pour les chaleurs spécifiques à pression et à volume constants, les chaleurs spécifiques c_p et c_v peuvent s'écrire en fonctions de variables d'état

$$c_v = \left(\frac{\delta q}{dT} \right)_v = \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_v, \quad (2.22)$$

$$c_p = \left(\frac{\delta q}{dT} \right)_p = \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_v + \left[\left(\frac{\partial e}{\partial v} \right)_T + p \right] \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p.$$

La transformation à volume massique constant fournit une expression simple pour c_v mais une expression complexe pour c_p , car les termes en dv ne s'annulent pas pour la transformation à pression constante.

La question se pose s'il n'existerait pas une autre variable d'état que l'énergie interne e qui conduise à une définition plus simple pour c_p . Cette fonction est l'enthalpie h dont la définition est

$$h = e + pv, \quad (2.23)$$

ce qui se traduit sous forme différentielle par l'expression suivante

$$dh = de + p dv + v dp = \delta q + v dp, \quad (2.24)$$

où la dernière égalité est obtenue en utilisant l'expression alternative du premier principe (2.15). De la même manière que précédemment, un système simple implique l'existence d'une relation de la forme

$$h = h(p, T), \quad (2.25)$$

qui devient à l'aide de la relation différentielle (2.3) puis de la relation (2.24)

$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T dp + \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p dT = \delta q + v dp. \quad (2.26)$$

Avec cette relation et en vertu des définitions (2.19) pour les chaleurs spécifiques à pression et à volume constants, les chaleurs spécifiques c_p et c_v peuvent s'écrire en fonctions de variables d'état

$$c_v = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p + \left[\left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T - v \right] \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v, \quad (2.27)$$

$$c_p = \left(\frac{\delta q}{dT} \right)_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p.$$

En combinant les relations (2.22) et (2.27), il est aussi possible d'écrire

$$\begin{aligned} c_p - c_v &= \left[p + \left(\frac{\partial e}{\partial v} \right)_T \right] \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p, \\ c_p - c_v &= \left[v - \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T \right] \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Le rapport des chaleurs spécifiques γ est défini comme

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{\left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p}{\left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_v}. \quad (2.29)$$

Cette grandeur est une caractéristique très importante du fluide.

2.2 Second principe de la thermodynamique

Le second principe traduit le caractère *irréversible* de toute transformation thermodynamique d'un système et nécessite l'introduction d'une nouvelle variable d'état appelée entropie. Cependant, pour de nombreuses transformations thermodynamiques, les effets liés à l'irréversibilité sont négligeables. Dans ce cas, le processus thermodynamique est considéré comme réversible et il existe une évolution inverse faisant passer le système de son état final à son état initial. L'intérêt de considérer des transformations réversibles est motivé par la substitution du terme δq dans le premier principe pour ne faire intervenir que des variables d'état.

2.2.1 Entropie

La loi de Clausius affirme que, pour une transformation *réversible* avec transfert de chaleur δq entre le système à température T et l'extérieur,

$$\oint \left(\frac{\delta q}{T} \right)_{\text{rév}} = 0. \quad (2.30)$$

Il est alors possible d'introduire une nouvelle variable d'état s , l'entropie, qui, pour une transformation *réversible* avec transfert de chaleur δq entre le système à température T et l'extérieur, est définie par

$$ds = \left(\frac{\delta q}{T} \right)_{\text{rév}}. \quad (2.31)$$

L'entropie étant une variable d'état, elle peut être utilisée quelque soit le type de transformation, réversible ou irréversible. Il est alors possible d'écrire d'une manière plus générale

$$ds = \frac{\delta q}{T} + \delta s_i, \quad (2.32)$$

où le terme δs_i représente l'action des phénomènes irréversible de la transformation. Ceux-ci peuvent par exemple résulter de phénomènes de dissipation interne, transfert de chaleur interne, diffusion d'espèces chimiques ou encore réactions chimiques.

2.2.2 Formulation du second principe

Comme souligné au début de cette section, toute transformation thermodynamique réelle est irréversible. D'après le second principe de la thermodynamique, la variation d'entropie d'un système thermodynamique quelconque, due aux opérations internes, ne peut être que positive ou nulle. Ceci se traduit sous forme différentielle par l'une ou l'autre des relation suivantes

$$\begin{aligned} \delta s_i &\geq 0, \\ ds &\geq \frac{\delta q}{T}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Ces équations sont diverses formes du second principe de la thermodynamique. Si les phénomènes irréversibles d'une transformation sont négligeables ($\delta s_i = 0$), la relation (2.32) donne immédiatement

$$\delta q = Tds. \quad (2.34)$$

Il est alors possible de ne faire apparaître que des variables d'état dans l'expression du premier principe puisque les relations (2.15) et (2.24) deviennent maintenant

$$\begin{aligned} de &= \delta q - pdv = Tds - pdv, \\ dh &= Tds + vdp, \end{aligned} \quad (2.35)$$

ou de manière équivalente

$$Tds = de + pdv = dh - vdp. \quad (2.36)$$

Ces relations, appelées relations de Gibbs, sont intéressantes, car elle ne contiennent que des variables d'état.

Ces relations ont été établies en supposant que le processus était réversible. Or, ces relations ne font intervenir que des variables d'état, et doivent être valables indépendamment du processus, qu'il soit réversible ou irréversible. *Si le processus est irréversible, ces relations restent donc valables.* En particulier, si le processus est irréversible, $\delta q < Tds$ et le travail des forces de pression doit donc être plus grand que $p dV$ afin que les relations de Gibbs restent vérifiées.

Les relations de Gibbs sont les relations fondamentales de la thermodynamique, car valables tout aussi bien pour des processus réversibles qu'irréversibles.

2.3 Transformations thermodynamiques

2.3.1 Relations thermodynamiques

Il est possible de trouver des relations générales entre variables thermodynamiques et entre leurs différentielles mutuelles.

Relations thermodynamiques obtenues à partir de $s = s(T, p)$ et $h = h(T, p)$

Pour des systèmes simples, il est toujours possible d'écrire des relations de la forme $s = s(T, p)$ et $h = h(T, p)$. Par conséquent, les expressions différentielles associées à ces équations s'écrivent

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T dp, \quad (2.37)$$

$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T dp = c_p dT + \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T dp. \quad (2.38)$$

La relation de Gibbs (2.36) et la seconde relation ci-dessus (2.38) donnent

$$ds = \frac{dh}{T} - \frac{vdp}{T} = \frac{1}{T} \left[c_p dT + \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T dp \right] - \frac{vdp}{T}, \quad (2.39)$$

puis

$$ds = \frac{1}{T} c_p dT + \frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T - v \right] dp, \quad (2.40)$$

qui par identification avec (2.37) génère les deux relations thermodynamiques suivantes

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p = \frac{c_p}{T}, \quad (2.41)$$

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T - v \right]. \quad (2.42)$$

En tenant compte de la propriété différentielle des dérivées croisées

$$\left(\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p\right)_T = \left(\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T\right)_p, \quad (2.43)$$

on obtient

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T = v - T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{\rho} + \frac{T}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{\rho} (1 - \beta_p \cdot T). \quad (2.44)$$

Quand cette relation est insérée dans (2.42), on obtient une des relations de Maxwell :

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T = - \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = -\beta_p v. \quad (2.45)$$

Avec la relation de réciprocité :

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_s \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p = -1, \quad (2.46)$$

alors

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s = \frac{\beta_p T v}{c_p}. \quad (2.47)$$

De manière similaire avec la relation de réciprocité :

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_h \left(\frac{\partial T}{\partial h}\right)_p = -1, \quad (2.48)$$

alors le coefficient de Joule-Thompson μ_{JT} peut être obtenu

$$\mu_{JT} \equiv \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_h = -\frac{1 - \beta_p T}{\rho c_p}. \quad (2.49)$$

Il est ainsi possible d'écrire pour un fluide (simple) :

$$dh = c_p(dT - \mu_{JT} dp) = c_p dT + \frac{1}{\rho} (1 - \beta_p T) dp \quad (2.50)$$

Relations thermodynamiques obtenues à partir de $s = s(v, T)$ et $e = e(v, T)$

Pour des systèmes simples, il est toujours possible d'écrire des relations de la forme $s = s(v, T)$ et $e = e(v, T)$. Par conséquent, les expressions différentielles associées à ces équations s'écrivent

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T dv + \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v dT, \quad (2.51)$$

$$de = \left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)_T dv + \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_v dT. \quad (2.52)$$

La relation de Gibbs (2.36) et la seconde relation ci-dessus (2.52) donnent

$$ds = \frac{de}{T} + \frac{pdv}{T} = \frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)_T dv + \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_v dT \right] + \frac{pdv}{T}, \quad (2.53)$$

puis

$$ds = \frac{1}{T} \left[p + \left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)_T \right] dv + \frac{1}{T} \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_v dT, \quad (2.54)$$

qui par identification avec (2.51) génère les deux relations thermodynamiques suivantes

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_v = \frac{c_v}{T}, \quad (2.55)$$

$$\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T = \frac{1}{T} \left[p + \left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)_T \right]. \quad (2.56)$$

En tenant compte de la propriété différentielle des dérivées croisées

$$\left(\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v\right)_T = \left(\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T\right)_v, \quad (2.57)$$

on obtient

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)_T &= T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v - p, \\ \left(\frac{\partial e}{\partial \rho}\right)_T &= \frac{1}{\rho^2} \left[p - T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho \right]. \end{aligned} \quad (2.58)$$

2.3.2 Calcul de la variation d'entropie

Le changement d'entropie lors d'une transformation générale entre deux états infiniment proches est donnée par la relation de Gibbs (2.36) qui est reproduite ici

$$ds = \frac{1}{T} de + \frac{p}{T} dv. \quad (2.59)$$

Par intégration des transformations infinitésimales séparant les états 1 et 2, il est possible d'écrire la variation d'entropie entre ces états sous la forme

$$\Delta s = s_2 - s_1 = \int_1^2 \frac{de}{T} + \int_1^2 \frac{p}{T} dv. \quad (2.60)$$

Comme le système est simple, l'énergie interne est de la forme $e = e(v, T)$ ce qui conduit à l'expression

$$\Delta s = \int_1^2 \frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_v dT + \left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)_T dv \right] + \int_1^2 \frac{p}{T} dv. \quad (2.61)$$

Avec les relations thermodynamiques (2.55) et (2.58) ainsi que de la définition de la chaleur spécifique à volume constant (2.22), il est possible d'écrire

$$\Delta s = \int_1^2 \frac{c_v}{T} dT + \int_1^2 \frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)_T + p \right] dv = \int_1^2 \frac{c_v}{T} dT + \int_1^2 \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v dv, \quad (2.62)$$

qui est une relation générale puisque aucune hypothèse n'a été faite pour la transformation.

2.3.3 Transformation isentropique

A partir de la relation (2.32)

$$ds = \frac{\delta q}{T} + \delta s_i, \quad (2.63)$$

une transformation est *isentropique* quand il n'y a pas de variations d'entropie, $ds = 0$. C'est le cas pour une transformation adiabatique, c'est à dire avec $\delta q = 0$, et réversible, c'est à dire avec $\delta s_i = 0$.

2.3.4 Vitesse du son

Un milieu fluide est choisi au repos avec les propriétés uniformes p_0 , ρ_0 , s_0 . Le fluide est tel que toute dissipation et conduction thermique sont absentes de toute transformation. L'entropie s reste alors constante au cours du temps, soit $s = s_0$. Par conséquent, il suffit de connaître une seule autre variable d'état pour déterminer complètement l'état du système simple, comme par exemple $p = p(\rho)$.

Une très petite perturbation de pression est générée dans le fluide. Avec un développement en série de Taylor autour des conditions de référence p_0 et s_0 , il est possible d'écrire

$$\Delta p = p - p_0 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s (\rho - \rho_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2}\right)_s (\rho - \rho_0)^2 + \dots \quad (2.64)$$

et définir la grandeur

$$a_0^2 = \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \right]_0, \quad (2.65)$$

où le symbole 0 indique que la dérivée est évaluée aux conditions de référence. Au premier ordre, l'équation devient

$$\Delta p = p - p_0 = a_0^2(\rho - \rho_0) = a_0^2 \Delta \rho, \quad (2.66)$$

où la grandeur a_0 a la dimension du carré d'une vitesse. Ceci conduit naturellement à la définition de la vitesse du son.

Vitesse du son La vitesse du son est la grandeur a définie par

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s}, \quad (2.67)$$

qui correspond à la vitesse de propagation des ondes de pression.

2.3.5 Compressibilité

Comme indiqué dans le Chapitre de l'Introduction, en mécanique des fluides la compressibilité est une indication de la variation de la masse volumique, quelle qu'en soit la cause.

En thermodynamique, le coefficient de compressibilité d'un fluide quantifie la variation du volume V d'une particule de fluide (et donc de sa masse volumique) sous l'effet de la pression p .

Coefficient de compressibilité Le coefficient de compressibilité d'un fluide est définie par la relation

$$\alpha = -\frac{1}{V} \left(\frac{dV}{dp} \right). \quad (2.68)$$

Le signe négatif est indicateur du fait que pour des fluides normaux une augmentation de pression dp engendre une variation *négative* du volume dV .

Cependant cette définition n'est pas suffisante pour un fluide dépendant de deux variables d'état. Si la température d'un élément fluide reste constante, on définit la compressibilité isotherme par

$$\alpha_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T. \quad (2.69)$$

D'autre part si aucune chaleur n'est enlevée ou ajoutée à l'élément et si tout phénomène irréversible est ignoré, la compression est isentropique et le coefficient de compressibilité est défini par

$$\alpha_s = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_s. \quad (2.70)$$

Comme la masse m est constante pour une particule de fluide, le coefficient de compressibilité peut être écrit en fonction du volume massique (ou spécifique) v

$$\alpha_T = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T \quad \text{et} \quad \alpha_s = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_s. \quad (2.71)$$

De manière similaire, le coefficient de compressibilité peut s'écrire en fonction de la masse volumique ρ

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \left(\frac{d\rho}{dp} \right). \quad (2.72)$$

où le signe négatif n'apparaît plus du fait que ρ est égal à $1/v$.

Compressibilité Le choix des variables d'état décrivant la variation de la masse volumique est fait selon le contexte de la transformation (ou l'écoulement).

Comme indiqué dans le Chapitre de l'Introduction, il est commun d'utiliser des variables d'états facilement mesurables (pression p et température T) pour exprimer la compressibilité, c'est à dire la variation de masse volumique ou de volume spécifique

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dv}{v} = \alpha_T dp - \beta_p dT = (\alpha_T \cdot p) \frac{dp}{p} - (\beta_p \cdot T) \frac{dT}{T}, \quad (2.73)$$

où le coefficient d'expansion thermique isobare a été donné en (1.2) et est reproduit ici

$$\beta_p = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p. \quad (2.74)$$

Dans le cadre de ce cours, les écoulements sans transfert de chaleur et sans frottements, dits isentropiques, sont communs. De ce fait, le choix de la pression p et de l'entropie s comme variables d'état donne

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s dp + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_p ds = \alpha_s dp - \frac{\beta_p T}{c_p} ds \quad (2.75)$$

où le coefficient devant la variation d'entropie ds s'obtient avec le résultat mathématique classique entre différentielles partielles et l'utilisation de la relation thermodynamique (2.103) pour c_p

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_p = \frac{1}{\rho} \frac{\left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p}{\left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p} = -\frac{\beta_p T}{c_p} \quad (2.76)$$

Ainsi, pour un écoulement (ou une transformation) isentropique

$$\frac{d\rho}{\rho} = \alpha_s dp = \frac{p}{\rho} \frac{1}{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s} \frac{dp}{p} = \frac{p}{\rho a^2} \frac{dp}{p} \quad (2.77)$$

Remarque Pour spécifier la compressibilité d'un écoulement isentropique, le module d'élasticité isentropique K_s (appelé en anglais, *isentropic bulk modulus*) peut aussi être utilisé. Il est défini par

$$K_s = \frac{1}{\alpha_s} = \rho \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \rho a^2, \quad (2.78)$$

Interprétation du nombre de Mach

Nous avons vu en introduction que la grandeur caractérisant la compressibilité d'un écoulement est le nombre de Mach dont nous rappelons la définition

$$M = \frac{u}{a}, \quad (2.79)$$

où a est la vitesse du son locale et u la norme de la vitesse locale \mathbf{u} de l'écoulement. En considérant le carré du nombre de Mach, il est possible de faire apparaître le module d'élasticité isentropique (2.78). En effet

$$M^2 = \frac{u^2}{a^2} = \frac{\rho u^2}{K_s} = \frac{\rho u^2 S}{K_s S}, \quad (2.80)$$

où S est une surface arbitraire. Or, le numérateur et le dénominateur du dernier membre de cette relation peuvent être interprétés comme des forces d'inertie et de rigidité

$$F_{inertie} \approx \rho u^2 S, \quad \text{et} \quad F_{rigidité} \approx K_s S, \quad (2.81)$$

mais aussi des contraintes puisque $\sigma = F/S$

$$\sigma_{inertie} \approx \rho u^2, \quad \text{et} \quad \sigma_{rigidité} \approx K_s. \quad (2.82)$$

Le nombre de Mach exprime ainsi le rapport entre les effets d'inertie et de rigidité, soit

$$M^2 \approx \frac{\sigma_{inertie}}{\sigma_{rigidite}}. \quad (2.83)$$

L'écoulement est compressible lorsque les forces d'inertie dominent les forces élastiques responsables de la propagation des ondes de pression.

2.4 Propriétés thermodynamiques des gaz parfaits

2.4.1 Définition

Si les atomes ou molécules composant le fluide sont suffisamment éloignées les uns des autres pour négliger leur interaction et que leur énergie se présente uniquement sous forme cinétique, la théorie cinétique des gaz montre que l'état thermodynamique d'un *gaz parfait* (*ideal gas* en anglais) répond à l'équation

$$p = nkT = \left(\frac{n}{N_A} \mathcal{M} \right) \left(\frac{kN_A}{\mathcal{M}} \right) T = \rho r T, \quad (2.84)$$

couramment appelée équation d'état des gaz parfaits. Les différents termes de cette équation sont les suivants

n	: nombre de particules (atomes, molécules) par unité de volume		$[\text{m}^{-3}]$
k	: constante de Boltzmann	$1.3806488 \cdot 10^{-23}$	$[\text{J} \cdot \text{K}^{-1}]$
$\mathcal{R} = kN_A$: constante des gaz parfaits	8.3144621	$[\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}]$
\mathcal{M}	: masse molaire		$[\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}]$
N_A	: constante d'Avogadro	$6.02214129 \cdot 10^{23}$	$[\text{mol}^{-1}]$
$\frac{n}{N_A} \mathcal{M} = \rho$: masse volumique		$[\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}]$
$r = \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}}$: constante molaire des gaz parfaits		$[\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}]$

Cette définition est équivalente à l'équation générale (2.73), qui est rappelée ici

$$\frac{d\rho}{\rho} = \alpha_T dp - \beta_p dT = (\alpha_T \cdot p) \frac{dp}{p} - (\beta_p \cdot T) \frac{dT}{T}, \quad (2.85)$$

car pour un gaz parfait les coefficients α_T et β_p peuvent être facilement évalués

$$\alpha_T \cdot p = 1, \quad \beta_p \cdot T = 1, \quad (2.86)$$

ce qui met l'équation originale (2.85) sous la forme

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{p} - \frac{dT}{T}, \quad (2.87)$$

qui n'est rien d'autre que la loi des gaz parfaits écrite sous forme différentielle.

2.4.2 Conséquences de l'équation des gaz parfaits

Energie interne et enthalpie

A partir des relations thermodynamiques suivantes choisies parmi celles obtenues précédemment

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{\rho} + \frac{T}{\rho^2} \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \right], \quad (2.88)$$

$$\left(\frac{\partial e}{\partial \rho} \right)_T = \frac{1}{\rho^2} \left[p - T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho \right]. \quad (2.89)$$

et dans le cas d'un gaz parfait, l'utilisation de l'équation d'état (2.84) permet l'évaluation des différents termes. Les relations précédentes donnent respectivement les résultats

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T = 0, \quad (2.90)$$

$$\left(\frac{\partial e}{\partial \rho}\right)_T = 0. \quad (2.91)$$

Par conséquent, pour les gaz parfaits, l'enthalpie h et l'énergie interne e sont uniquement fonctions de la température. Ainsi

$$e = e(T) \quad \text{et} \quad h = h(T). \quad (2.92)$$

Variation de l'énergie interne

Etant donné que pour un gaz parfait l'énergie interne n'est fonction que de la température (2.92), il est possible d'écrire

$$de = \left(\frac{\partial e}{\partial \rho}\right)_T d\rho + \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_\rho dT = \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_\rho dT. \quad (2.93)$$

De plus, à l'aide de la définition de la chaleur spécifique à volume constant (2.22), une simple intégration donne

$$e = \int c_v(T) dT + \text{const}, \quad (2.94)$$

qui, pour une transformation à c_v constant, devient

$$e = c_v T + \text{const}. \quad (2.95)$$

Variation de l'enthalpie

Comme pour un gaz parfait l'enthalpie n'est fonction que de la température (2.92), il est possible d'écrire

$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T dp + \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p dT = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p dT. \quad (2.96)$$

De plus, à l'aide de la définition de la chaleur spécifique à pression constante (2.27), une simple intégration donne

$$h = \int c_p(T) dT + \text{const}, \quad (2.97)$$

qui, pour une transformation à c_p constant, devient

$$h = c_p T + \text{const}. \quad (2.98)$$

Un gaz pour lequel c_v et c_p sont indépendants de la température (sur une certaine plage de température) est dit *gaz parfait à chaleurs spécifiques constantes* (un tel gaz est dit, en anglais, *perfect gas* ou encore, *thermally and calorically perfect gas*).

Chaleurs spécifiques

La différence entre les chaleurs spécifiques à pression et à volume constant a été exprimée à la relation (2.28). Avec le résultat (2.92) et l'équation d'état (2.84), la relation de Meyer est obtenue

$$c_p - c_v = \left[v - \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T \right] \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = v \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = r. \quad (2.99)$$

Après division par c_p

$$1 - \frac{c_v}{c_p} = \frac{r}{c_p}, \quad (2.100)$$

puis avec le rapport des chaleurs spécifiques γ , il vient

$$c_p = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} \quad \text{et} \quad c_v = \frac{r}{\gamma - 1}. \quad (2.101)$$

L'Annexe C présente une étude approfondie de l'influence de la température sur les chaleurs spécifiques et le rapport des chaleurs spécifiques.

Variation d'entropie avec $s = s(p, T)$

Pour des systèmes simples, il est toujours possible d'écrire des relations de la forme

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T dp + \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p dT. \quad (2.102)$$

Les relations thermodynamiques (2.41) et (2.42) évaluées avec l'équation d'état (2.84) deviennent

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T = -\frac{v}{T} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p = \frac{c_p}{T}. \quad (2.103)$$

Après insertion de ces relations dans (2.102) et utilisation de l'équation d'état, l'entropie devient

$$s = \int c_p \frac{dT}{T} - r \ln(p) + \text{const}, \quad (2.104)$$

qui, pour une transformation définie à c_p constant, devient

$$\Delta s = c_p \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - r \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right). \quad (2.105)$$

Variation d'entropie avec $s = s(v, T)$

Pour des systèmes simples, il est toujours possible d'écrire des relations de la forme

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial v} \right)_T dv + \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_v dT. \quad (2.106)$$

Les relations thermodynamiques (2.55) et (2.56) évaluées avec l'équation d'état (2.84) deviennent

$$\left(\frac{\partial s}{\partial v} \right)_T = \frac{p}{T} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_v = \frac{c_v}{T}. \quad (2.107)$$

Après insertion de ces relations dans (2.106) et utilisation de l'équation d'état, l'entropie devient

$$s = \int c_v \frac{dT}{T} + r \ln(v) + \text{const}, \quad (2.108)$$

qui, pour une transformation définie à c_v constant, devient

$$\Delta s = c_v \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + r \ln \left(\frac{v_2}{v_1} \right). \quad (2.109)$$

2.4.3 Transformation isentropique

Pour un gaz parfait à chaleurs spécifiques constantes, la relation (2.109) devient, en utilisant la relation (2.101) pour c_v ,

$$\Delta s = \frac{r}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + r \ln \left(\frac{v_2}{v_1} \right), \quad (2.110)$$

soit,

$$\frac{1}{r} \Delta s = \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} + \ln \left(\frac{v_2}{v_1} \right). \quad (2.111)$$

Une transformation isentropique, c'est-à-dire adiabatique et réversible, correspond à $\Delta s = 0$. La substitution de cette condition dans la relation précédente mène à

$$\ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} + \ln \left(\frac{v_2}{v_1} \right) = 0, \quad (2.112)$$

ce qui s'écrit aussi sous la forme

$$\left(\frac{v_2}{v_1}\right) = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}. \quad (2.113)$$

Avec l'équation des gaz parfaits, les relations deviennent

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad \text{et} \quad \left(\frac{p_2}{p_1}\right) = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{-\gamma}, \quad (2.114)$$

puis avec $v = 1/\rho$ l'expression suivant est obtenue, souvent appelée relation isentropique

$$p = \text{const} \cdot \rho^\gamma. \quad (2.115)$$

2.4.4 Vitesse du son

Dans le cas d'un gaz parfait, l'équation d'état permet d'évaluer la vitesse du son explicitement en fonction de variables d'état. En effet, à partir de la relation isentropique (2.115)

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \text{const} \cdot \gamma \rho^{\gamma-1} = \gamma \frac{\text{const} \cdot \rho^\gamma}{\rho} = \gamma \frac{p}{\rho}, \quad (2.116)$$

et avec l'équation d'état

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \gamma r T. \quad (2.117)$$

Il est à remarquer que

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T = r T = \frac{p}{\rho}. \quad (2.118)$$

d'où la relation suivante est déduite

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \gamma \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T. \quad (2.119)$$

Cette relation (2.119) est en fait générale pour tout fluide simple, pas simplement un gaz parfait.

La vitesse du son est donc une propriété du fluide par l'intermédiaire des grandeurs r et γ , et dépend de la température T (également à travers γ).

2.4.5 Compressibilité d'un gaz parfait en écoulement isentropique

A partir de l'équation (2.77) pour un écoulement isentropique

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{p}{\rho a^2} \frac{dp}{p} \quad (2.120)$$

et les relations $p = \rho r T$ et $a^2 = \gamma r T$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{p} \quad (2.121)$$

Chapitre 3

Equations fondamentales

Pour les écoulements incompressibles, les variables indépendantes sont la pression p et la vitesse \mathbf{u} . Par conséquent, seules les équations de conservation de la quantité de mouvement et de la masse sont nécessaires.

Pour les écoulements compressibles, la masse volumique ρ est variable. Il est ainsi nécessaire d'introduire une équation de conservation supplémentaire : l'équation d'énergie. En plus de la masse volumique, l'équation de conservation de l'énergie fait intervenir de nouvelles variables : l'énergie interne e (ou l'enthalpie h) et la température T . Par conséquent, il est nécessaire d'inclure deux autres équations thermodynamiques, dites constitutives, pour la fermeture du système d'équation. Une équation, dite *équation d'état*, relie généralement trois variables d'état facilement mesurables, telles la pression p , la température T , et la masse volumique ρ . La deuxième équation relie l'énergie e (ou l'enthalpie h) à deux autres variables d'états, généralement mesurables.

En résumé, les variables nécessaires pour l'étude des écoulements compressibles sont au nombre de sept p , \mathbf{u} , e , ρ et T . Il y a donc les cinq équations de conservation (masse, quantité de mouvement, énergie) et les deux équations constitutives (équation d'état, relation thermodynamique).

3.1 Equations de conservation

3.1.1 Conservation de la masse

Formulation intégrale

L'équation de la conservation de la masse traduit l'équilibre entre la variation temporelle de masse volumique à l'intérieur d'un volume V (choisi fixe, c'est à dire ne dépendant pas du temps) et son débit à travers la surface S de ce volume. Sous forme intégrale l'équation s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_S \hat{\mathbf{n}} \cdot (\rho \mathbf{u}) dS = 0, \quad (3.1)$$

et à l'aide du théorème de la divergence (et de l'hypothèse que le volume est fixe)

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right] dV = 0. \quad (3.2)$$

Formulation différentielle

Comme (3.2) doit s'annuler quel que soit le volume V sur lequel porte l'intégrale, l'intégrand doit forcément être nul. L'équation de conservation de la masse peut être formulée sous forme différentielle

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (3.3)$$

qui représente la forme locale de (3.2).

3.1.2 Conservation de la quantité de mouvement

Formulation intégrale

Le principe de conservation de la quantité de mouvement stipule que la variation temporelle de cette grandeur est égale à la somme des forces. Ici, la somme de la variation temporelle de quantité de

mouvement à l'intérieur du volume V et son flux à travers la surface S est égale à la somme des forces surfaciques et volumiques

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \mathbf{u} dV + \int_S \hat{\mathbf{n}} \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) dS = \int_S \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\Sigma} dS + \int_V \rho \mathbf{f} dV, \quad (3.4)$$

où $\boldsymbol{\Sigma}$ représente le tenseur des contraintes et \mathbf{f} le vecteur des forces volumiques. Il est utile de décomposer le tenseur des contraintes comme la somme d'un tenseur ne faisant intervenir que la pression p et un tenseur des contraintes visqueuses \mathbf{T} dépendant du mouvement du fluide

$$\boldsymbol{\Sigma} = -p\mathbf{I} + \mathbf{T}. \quad (3.5)$$

où \mathbf{I} est le tenseur identité. Le théorème de la divergence permet de transformer l'intégrale surfacique (avec l'hypothèse d'un volume fixe)

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) \right] dV = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma} dV + \int_V \rho \mathbf{f} dV, \quad (3.6)$$

où $\mathbf{u} \mathbf{u}$ représente un tenseur dyadique (que l'on représente souvent, et lourdement, comme un produit tensoriel $\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$) et

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma} = -\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T}. \quad (3.7)$$

Pour un écoulement sans forces visqueuses, ce terme s'écrit

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma} = -\nabla p \quad (3.8)$$

tandis que pour un écoulement sans contraintes visqueuses

$$\boldsymbol{\Sigma} = -p\mathbf{I}, \quad (3.9)$$

ce qui représente la loi de comportement d'un fluide parfait.

La distinction doit être faite entre un fluide parfait et un écoulement sans forces visqueuses. Par exemple, l'écoulement potentiel (c'est à dire sans vorticité, pour lequel le vecteur vitesse peut s'écrire comme le gradient d'un potentiel) d'un écoulement incompressible à viscosité constante est un écoulement sans forces visqueuses, même si le fluide est visqueux. Dans la majorité des cas pour ce cours, seuls les écoulements de fluides parfaits seront traités.

Ainsi, pour le cas de fluides parfaits (ou des écoulements sans forces visqueuses), les formulations générales de conservation de la quantité de mouvement (3.4) et (3.6) deviennent respectivement

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \mathbf{u} dV + \int_S \hat{\mathbf{n}} \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) dS = - \int_S p \hat{\mathbf{n}} dS + \int_V \rho \mathbf{f} dV, \quad (3.10)$$

et

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) \right] dV = - \int_V \nabla p dV + \int_V \rho \mathbf{f} dV. \quad (3.11)$$

Formulation différentielle

Comme (3.6) doit être vérifiée quel que soit le volume V sur lequel porte l'intégrale, la somme des intégrands du membre de droite doit être égale à celle du membre de gauche. L'équation de conservation de la quantité de mouvement peut être formulée sous forme différentielle

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = \nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma} + \rho \mathbf{f} = -\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{f}, \quad (3.12)$$

laquelle, avec la loi pour un écoulement sans forces visqueuses (3.8) ou pour un fluide parfait (3.9), s'écrit

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = -\nabla p + \rho \mathbf{f}, \quad (3.13)$$

qui représente la forme locale de (3.11).

Formulation d'Euler

Dans le cas d'un écoulement sans forces visqueuses, il est possible d'obtenir une autre formulation de la conservation de la quantité de mouvement, qui porte le nom d'équations d'Euler. Les termes du membre de gauche de (3.13) peuvent être développés pour faire apparaître

$$\mathbf{u} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right] + \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{f}, \quad (3.14)$$

où le premier terme du membre de gauche s'annule de par l'équation de conservation de la masse (3.3). Ainsi, les équations d'Euler s'écrivent sous la forme

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{f}. \quad (3.15)$$

Formulation de Lamb

Avec la relation vectorielle

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \nabla \frac{u^2}{2} - \mathbf{u} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{u}) = \nabla \frac{u^2}{2} - \mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega}, \quad (3.16)$$

où $u^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$, et $\boldsymbol{\omega}$ est le vecteur tourbillon, vorticité, ou rotationnel du vecteur vitesse

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \wedge \mathbf{u}, \quad (3.17)$$

l'équation d'Euler (3.15) peut s'écrire sous la forme de Lamb

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \frac{u^2}{2} + \mathbf{f}. \quad (3.18)$$

Formulation de Crocco

Cette formulation est obtenue à partir de la relation de Gibbs (2.36)

$$\frac{1}{\rho} dp = dh - T ds. \quad (3.19)$$

Les différentielles totales peuvent être développées en fonction des variables spatiales

$$\left(\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla h + T \nabla s \right) \cdot d\mathbf{x} = 0. \quad (3.20)$$

Par suite, indépendamment de $d\mathbf{x}$, distance entre deux points de l'espace, cette équation devient

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla h - T \nabla s, \quad (3.21)$$

qui permet d'obtenir avec l'expression (3.18) la formulation de Crocco pour la conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega} = -\nabla h_0 + T \nabla s + \mathbf{f}, \quad (3.22)$$

   h_0 est l'enthalpie de *réservoir*, de *stagnation*, ou d'*arrêt*, définie comme

$$h_0 \equiv h + \frac{u^2}{2}. \quad (3.23)$$

Si la force volumique \mathbf{f} peut s'écrire comme le gradient d'un potentiel $-\nabla \phi$, alors l'enthalpie *totale* est définie comme

$$h_t \equiv h + \frac{u^2}{2} + \phi = h_0 + \phi. \quad (3.24)$$

En dynamique des gaz, les forces volumiques sont souvent négligeables, et l'enthalpie d'arrêt est souvent appelée enthalpie totale.

L'équation de Crocco sous la forme

$$\nabla h_0 = -\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega} + T \nabla s + \mathbf{f}, \quad (3.25)$$

devient alors selon les hypothèses :

Permanent	$\nabla h_0 = \mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega} + T \nabla s + \mathbf{f}$
Sans forces volumiques	$\nabla h_0 = \mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega} + T \nabla s$
Isentropique	$\nabla h_0 = \mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega}$
Irrotationnel	$\nabla h_0 = 0 \quad \longrightarrow \quad h_0 = \text{const}$

Dans ce dernier cas l'enthalpie de stagnation h_0 est une constante dans tout l'écoulement.

Lorsque l'écoulement est rotationnel, il est possible de projeter la relation $\nabla h_0 = \mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega}$ le long d'une ligne de courant de vecteur unitaire $\hat{\ell} = \mathbf{u}/u$, de sorte que $\hat{\ell} \cdot (\mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega}) = 0$ et $\hat{\ell} \cdot \nabla h_0 = 0$. Dans ce cas de figure, l'enthalpie de réservoir est constante le long d'une ligne de courant, et la constante change pour chaque ligne de courant.

3.1.3 Conservation de l'énergie

Formulation intégrale

Comme dans le cas du premier principe de la thermodynamique, l'équation d'énergie traduit le principe général de la conservation de l'énergie, c'est-à-dire que la quantité totale d'énergie est constante mais qu'elle peut être transférée ou transformée. Ici, l'équation d'énergie stipule que la somme de l'énergie contenue dans le volume V et de son flux à travers la surface de ce volume est égale aux différentes sources d'énergie. Les sources sont le travail des force de surface, le travail de forces de volume, le transfert de chaleur \mathbf{q} et le rayonnement r . Ceci s'exprime par

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho e_0 dV + \int_V \nabla \cdot (\rho e_0 \mathbf{u}) dV = \int_V \nabla \cdot (\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{u}) dV + \int_V \rho (\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}) dV - \int_V \nabla \cdot \mathbf{q} dV + \int_V r dV, \quad (3.26)$$

où

$$e_0 \equiv e + \frac{1}{2} u^2 \quad (3.27)$$

est l'énergie de stagnation (avec $u^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$). Pour un fluide parfait, le travail des forces de contact se réduit à celui des forces de pression en vertu de (3.9), soit

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho e_0 dV + \int_V \nabla \cdot (\rho e_0 \mathbf{u}) dV = - \int_V \nabla \cdot (p \mathbf{u}) dV + \int_V \rho (\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}) dV - \int_V \nabla \cdot \mathbf{q} dV + \int_V r dV. \quad (3.28)$$

Formulation différentielle

Comme (3.28) doit être vérifiée quel que soit le volume V sur lequel porte l'intégrale, la somme des intégrants du membre de droite doit être égale à celle du membre de gauche. L'équation de conservation de l'énergie peut être alors formulée sous forme différentielle

$$\rho \frac{De_0}{Dt} = \frac{\partial (\rho e_0)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e_0 \mathbf{u}) = \nabla \cdot (\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{u}) + \rho (\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + r, \quad (3.29)$$

ou

$$\rho \frac{De_0}{Dt} = \frac{\partial (\rho e_0)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e_0 \mathbf{u}) = -\nabla \cdot (p \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}) + \rho (\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + r, \quad (3.30)$$

et pour un fluide parfait

$$\rho \frac{De_0}{Dt} = \frac{\partial (\rho e_0)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e_0 \mathbf{u}) = -\nabla \cdot (p \mathbf{u}) + \rho (\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + r, \quad (3.31)$$

ce qui représente la forme locale de (3.28).

Enthalpie

L'enthalpie peut être introduite par l'intermédiaire de sa définition $h = e + pv$, ou, en terme de valeurs de stagnation

$$h_0 = h + \frac{1}{2}u^2 = (e + pv) + \frac{1}{2}u^2 = (e + \frac{1}{2}u^2) + pv = e_0 + pv. \quad (3.32)$$

Ainsi

$$\frac{\partial(\rho e_0)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e_0 \mathbf{u}) = \frac{\partial(\rho h_0)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho h_0 \mathbf{u}) - \frac{\partial p}{\partial t} - \nabla \cdot (p \mathbf{u}), \quad (3.33)$$

ce qui donne

$$\rho \frac{Dh_0}{Dt} = \frac{\partial(\rho h_0)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho h_0 \mathbf{u}) = \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (p \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{u}) + \rho(\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + r \quad (3.34)$$

ou

$$\rho \frac{Dh_0}{Dt} = \frac{\partial(\rho h_0)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho h_0 \mathbf{u}) = \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}) + \rho(\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + r \quad (3.35)$$

Pour un fluide parfait

$$\rho \frac{Dh_0}{Dt} = \frac{\partial(\rho h_0)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho h_0 \mathbf{u}) = \frac{\partial p}{\partial t} + \rho(\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + r, \quad (3.36)$$

Entropie

La relation suivante, obtenue à partir de l'équation de conservation de mouvement,

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = (\nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma}) \cdot \mathbf{u} + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}. \quad (3.37)$$

permet de ré-écrire les équations de conservation d'énergie et d'enthalpie sous la forme

$$\rho \frac{De}{Dt} = \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{u}) = -p \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{T} : \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} + r, \quad (3.38)$$

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho h \mathbf{u}) = \frac{Dp}{Dt} + \mathbf{T} : \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} + r, \quad (3.39)$$

où il a été fait usage de l'identité suivante

$$\mathbf{T} : \nabla \mathbf{u} = \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}) - (\nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{u}. \quad (3.40)$$

Le terme $\mathbf{T} : \nabla \mathbf{u}$, la double contraction du tenseur des contraintes visqueuses et du gradient de vitesse (un tenseur également), s'appelle la *fonction de dissipation visqueuse*, qui est toujours positive ou nulle. Ainsi les forces visqueuses entraînent toujours un accroissement de l'énergie interne et de l'enthalpie.

Afin d'obtenir une équation de conservation pour l'entropie, il suffit d'introduire la relation de Gibbs $de = Tds - pdv$ ou $dh = Tds + vdp$ dans les équations précédentes

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = T \left[\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho s \mathbf{u}) \right] = \mathbf{T} : \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} + r. \quad (3.41)$$

Pour un fluide parfait et pour un écoulement adiabatique et sans rayonnement,

$$\frac{Ds}{Dt} = 0, \quad (3.42)$$

ce qui traduit le fait que l'entropie reste invariante en suivant une particule de fluide. En écoulement permanent, l'entropie est constante le long d'une ligne de courant.

3.2 Equations d'état

Les équations de conservation de la masse, de quantité de mouvement et d'énergie forment un système de 5 équations avec les sept inconnues p, ρ, \mathbf{u}, T , et e (ou h). La fermeture du système d'équations requiert l'ajout de deux équations d'état.

3.2.1 Equation d'état reliant p , T , et ρ

Si le fluide est parfait, l'équation d'état prend la forme simple (2.84)

$$p = \rho r T. \quad (3.43)$$

Pour un fluide quelconque, l'équation d'état sous forme plus générale (2.73) doit être utilisée

$$\frac{d\rho}{\rho} = \alpha_T dp - \beta_p dT = (\alpha_T \cdot p) \frac{dp}{p} - (\beta_p \cdot T) \frac{dT}{T}. \quad (3.44)$$

3.2.2 Equation d'état pour e ou h

Pour un gaz parfait, l'énergie est définie en fonction de la température par la relation intégrale

$$e = \int c_v(T) dT + \text{const}. \quad (3.45)$$

En adoptant l'hypothèse que c_v est indépendant de la température (gaz calorifiquement parfait), cette relation se simplifie sous la forme

$$e = c_v T + \text{const}. \quad (3.46)$$

Dans le cadre d'écoulements de fluides, l'enthalpie h apparaît comme une variable naturelle. De manière similaire

$$h = \int c_p(T) dT + \text{const}. \quad (3.47)$$

et avec l'hypothèse que c_p est indépendant de la température (gaz calorifiquement parfait)

$$h = c_p T + \text{const}. \quad (3.48)$$

Pour un fluide quelconque, l'énergie et l'enthalpie peuvent être exprimées en fonction de deux variables d'état, comme par exemple les relations (2.52) et (2.38) qui sont rappelées ici

$$de = \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_v dT + \left(\frac{\partial e}{\partial v} \right)_T dv = c_v dT + \left(\frac{\partial e}{\partial v} \right)_T dv \quad (3.49)$$

$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T dp = c_p dT + \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T dp \quad (3.50)$$

Avec le résultat (2.44) qui est rappelé ici

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{\rho} (1 - \beta_p \cdot T), \quad (3.51)$$

il est alors possible d'écrire

$$dh = c_p dT + \frac{1}{\rho} (1 - \beta_p \cdot T) dp. \quad (3.52)$$

En particulier, pour un gaz parfait, $\beta_p \cdot T = 1$.

Cette relation peut être ré-écrite en fonction d'un autre paramètre, le *coefficient de Joule-Tompson* μ_{JT} , déjà introduit au Chapitre précédent, mesurable expérimentalement, et servant à caractériser les gaz non parfaits, défini par

$$\mu_{JT} \equiv \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_h. \quad (3.53)$$

Il a été démontré

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T = -\mu_{JT} \cdot c_p \quad (3.54)$$

ce qui donne une version alternative de l'équation d'état générale pour l'enthalpie h

$$dh = c_p (dT - \mu_{JT} dp) \quad (3.55)$$

En particulier, pour un gaz parfait, $\mu_{JT} = 0$

3.3 Sens physique de la vitesse du son

La vitesse du son est une propriété variable d'un milieu puisque nous avons vu qu'elle dépend, dans le cas d'un gaz parfait, de sa température (2.117)

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \gamma r T = \frac{\gamma p}{\rho}, \quad (3.56)$$

où les deux dernières égalités sont obtenues en utilisant la relation des gaz parfaits (2.84). Considérons un gaz au repos ou en translation uniforme $p = p_0$ et $\rho = \rho_0$. Créons-y une petite perturbation et étudions son déplacement suivant une direction, par exemple x . Cette perturbation peut être considérée comme due à la création dans un plan d'une petite vitesse initiale u et d'une petite variation de pression p' générant une petite fluctuation ρ' de la masse volumique. Ces grandeurs étant les mêmes dans le plan perpendiculaire à la direction x . Nous admettrons que l'écoulement est irrotationnel et adiabatique ainsi que des transformations réversibles. Les variables dépendantes ne seront fonctions que de x et de t . Considérons alors les équations de conservation avec les hypothèses précédentes

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ p = k \rho^\gamma. \end{cases} \quad (3.57)$$

Éliminons la pression entre l'équation de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie (3.57). Pour cela, dérivons tout d'abord l'équation d'énergie de manière à obtenir

$$\frac{\partial p}{\partial x} = k \gamma \rho^{\gamma-1} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \gamma \frac{p}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad (3.58)$$

ainsi l'équation de conservation de la quantité de mouvement devient

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\gamma \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x}. \quad (3.59)$$

Définissons les petites perturbations de la masse volumique par $\frac{\rho'}{\rho_0} = \varepsilon$, la masse volumique s'écrit alors

$$\rho = \rho_0 + \rho' = \rho_0 \left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0} \right) = \rho_0 (1 + \varepsilon). \quad (3.60)$$

Étant donné que nous considérons un fluide au repos ou en translation uniforme ainsi que de faibles perturbations, les effets d'inertie peuvent être négligés. En d'autres termes, nous avons

$$\left| u \frac{\partial u}{\partial x} \right| \ll \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|. \quad (3.61)$$

Les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement (3.57) deviennent à l'aide de (3.59), (3.60) et (3.61) et en négligeant les infiniments petits du second ordre

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (3.62)$$

Nous éliminons alors ε des relations (3.62) en dérivant la première par rapport à l'espace et la seconde par rapport au temps

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t \partial x} = 0. \end{cases} \quad (3.63)$$

En utilisant la vitesse du son (3.56), l'élimination des termes en ε des relations précédentes donne

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (3.64)$$

couramment appelée équation de d'Alembert ou des cordes vibrantes. Sa solution générale est de la forme,

$$u = F(x - a_0 t) + G(x + a_0 t), \quad (3.65)$$

comprenant ainsi une onde progressive se propageant à la vitesse a_0 suivant le sens positif de l'axe des x et une onde rétrograde se propageant à la même vitesse selon le sens négatif de x . Considérons seulement l'onde progressive

$$u = F(x - a_0 t), \quad (3.66)$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\frac{\partial u}{\partial x} = F' \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = F' a_0. \quad (3.67)$$

A l'aide de ce résultat, nous pouvons ré-interpréter l'hypothèse (3.61) de la manière suivante

$$|u F'| \ll |F' a_0|, \quad (3.68)$$

en d'autres termes

$$|u| \ll |a_0|. \quad (3.69)$$

Il faut donc que la vitesse induite par la perturbation soit très inférieure à la vitesse de propagation de cette perturbation.

Remarque Si l'on avait éliminé la vitesse u , on aurait pu obtenir en tenant compte de la définition de ε et de la relation liant la pression et la masse volumique

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} = 0, \quad (3.70)$$

ou

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = 0. \quad (3.71)$$

Chapitre 4

Principes fondamentaux des écoulements isentropiques permanents

Ce chapitre présente les principes fondamentaux des écoulements isentropiques en régime permanent. Les résultats obtenus seront très instructifs par leur simplicité pour la connaissance des effets essentiels de compressibilité dans un écoulement. Ils ont l'avantage de mettre en évidence les grands phénomènes qui sont les conséquences des effets de la compressibilité. Du fait de leur isentropie, les écoulements seront adiabatiques et dénués de viscosité, et de plus, ne seront pas soumis à des forces volumiques.

4.1 Ondes de Mach

Les ondes de Mach sont des ondes isentropiques apparaissant dans un écoulement supersonique. En particulier, une onde de Mach n'est pas une onde de choc (qui elle génère de l'entropie). Une onde de Mach se décrit facilement par l'intermédiaire d'un schéma, introduit pour la première fois par Ernst Mach lui-même (1887), et devenu depuis très populaire.

Le principe de base est qu'une onde de pression d'amplitude infinitésimale par rapport à la pression ambiante se propage à une vitesse égale à la vitesse du son dans un milieu au repos (voir la discussion dans le Chapitre 3 sur les ondes acoustiques). Si le milieu est en mouvement par rapport à la source, l'onde se propagera toujours avec la même vitesse *par rapport au fluide* (cette fois-ci en mouvement).

Le schéma ci-après illustre ce concept pour une onde uni-dimensionnelle dans une conduite dans laquelle s'écoule un fluide. La conduite est tapotée à intervalles réguliers avec un petit marteau, produisant donc des pulsations acoustiques dans la conduite avec une vitesse

$$u_{\text{onde}} = U \pm a, \quad (4.1)$$

où U est la vitesse de l'écoulement dans la conduite, a la vitesse du son (par rapport au fluide), et u_{onde} la vitesse de l'onde dans un référentiel fixe par rapport à la conduite.

Sans écoulement, l'onde se propage symétriquement de part et d'autre de la conduite. Pour une vitesse d'écoulement dans la conduite inférieure à la vitesse du son (écoulement subsonique), l'onde est portée plus dans le sens de l'écoulement (aval) que dans le sens contraire (amont). Pour un écoulement supersonique, l'onde ne réussit pas à se propager en aval. Cet exemple simple illustre le principe fondamental des écoulements compressibles, que l'influence de perturbations en amont d'un écoulement diminue avec l'accroissement du nombre de Mach M , défini comme le rapport entre la vitesse de l'écoulement et la vitesse du son

$$M = \frac{U}{a}. \quad (4.2)$$

Dans un contexte tridimensionnel, une source émet à intervalles réguliers une pulsation acoustique se propageant dans un milieu au repos (air ambiant par exemple). Thompson (1972) utilise l'image d'un bourdon, pour lequel les pulsations périodiques peuvent correspondre au battement régulier des ailes du bourdon.

Cette image, qui illustre bien le principe, ne doit cependant pas suggérer qu'une pulsation est nécessaire : tout corps se déplaçant dans un fluide génère un champ de pression qui est établi lors du mouvement du corps par un spectre *continu* d'ondes de pressions se propageant à la vitesse du son par rapport au fluide au repos. Ceci revient à remplacer la pulsation unique par une somme infinie (ou intégrale) de composantes spectrales (de Fourier) décrivant ainsi le champ de pression.

Quand le bourdon est stationnaire, il émet des ondes acoustiques sphériques centrées sur le bourdon, se propageant à une vitesse a par rapport au milieu.

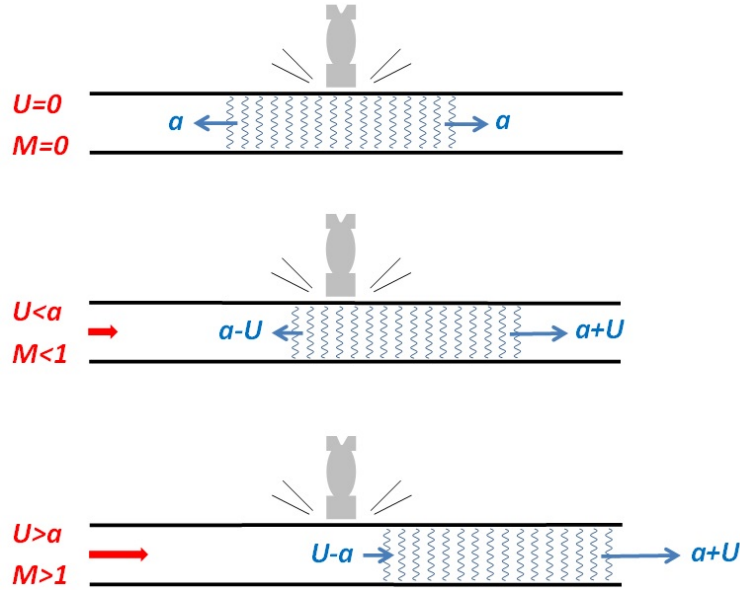


FIGURE 4.1 – Ondes dans un écoulement à l’arrêt, subsonique, et supersonique selon Thompson (1972)

Quand le bourdon se déplace avec une vitesse U , les ondes maintiennent une configuration sphérique avec un rayon proportionnel à l’intervalle de temps entre l’instant d’émission et l’instant considéré. En fonction du temps, le centre géométrique de chaque onde reste fixe par rapport au milieu au repos et coïncide avec la position du bourdon au moment de l’émission de l’onde en question.

Quand le bourdon se déplace à une vitesse U inférieure à la vitesse de propagation a des ondes (nombre de Mach inférieur à l’unité, $M = U/a < 1$), le bourdon ne rattrape jamais les ondes qu’il a émises. A un instant donné ($t = 3\Delta t$), la configuration de toutes les ondes a l’aspect schématisé sur la Figure 4.2. Le bourdon se trouve alors en position 3. Les ondes ont été émises à intervalles réguliers Δt . L’onde centrée en 0 a été émise à $t = 0$ et son front s’est propagé sur une distance $3a\Delta t$. De même, l’onde centrée en 1 (ou 2) a été émise quand le bourdon se trouvait en position 1 (ou 2), et à l’instant donné $t = 3\Delta t$, son front s’est propagé à une distance $2a\Delta t$ (ou $a\Delta t$).

Quand le bourdon se déplace à une vitesse U supérieure à la vitesse de propagation a des ondes (nombre de Mach supérieur à l’unité $M = U/a > 1$), le bourdon dépasse systématiquement le front de l’onde émise. La configuration des ondes à un instant donné ($t = 3\Delta t$) a alors l’aspect schématisé sur la Figure 4.2. Une zone conique se dessine alors de manière naturelle. De simples considérations géométriques montrent que ce cône a pour demi-angle μ donné par

$$\sin \mu = \frac{a\Delta t}{U\Delta t} = \frac{2a\Delta t}{2U\Delta t} = \frac{3a\Delta t}{3U\Delta t} = \dots \quad (4.3)$$

ou

$$\mu = \sin^{-1} \frac{1}{M}. \quad (4.4)$$

La surface de ce cône est ce que l’on appelle une *onde de Mach* (*Mach wave* en anglais). On rencontre parfois le terme *ligne de Mach*, terme restrictif qui ne s’applique qu’au cas où l’onde est rectiligne (dans un champ où le nombre de Mach est uniforme). En deux dimensions (bourdon cylindrique!), le cône de Mach est remplacé par un triangle.

En dehors de ce cône, un observateur n’est pas conscient de la présence du bourdon : il s’agit de la zone de *silence*. Ce n’est qu’au moment où l’observateur est traversé par l’onde de Mach qu’il deviendra conscient de la présence du bourdon : il se trouvera alors dans la zone d’*influence*.

Il est à remarquer qu’un changement de repère Galiléen qui nous place dans un référentiel fixe par rapport au bourdon ne change pas la configuration géométrique des ondes (le cône de Mach garde la même ouverture). La différence vient de la présence d’un vent supersonique emportant ainsi les ondes sphériques (et leur centre géométrique) dans le sens de son écoulement.

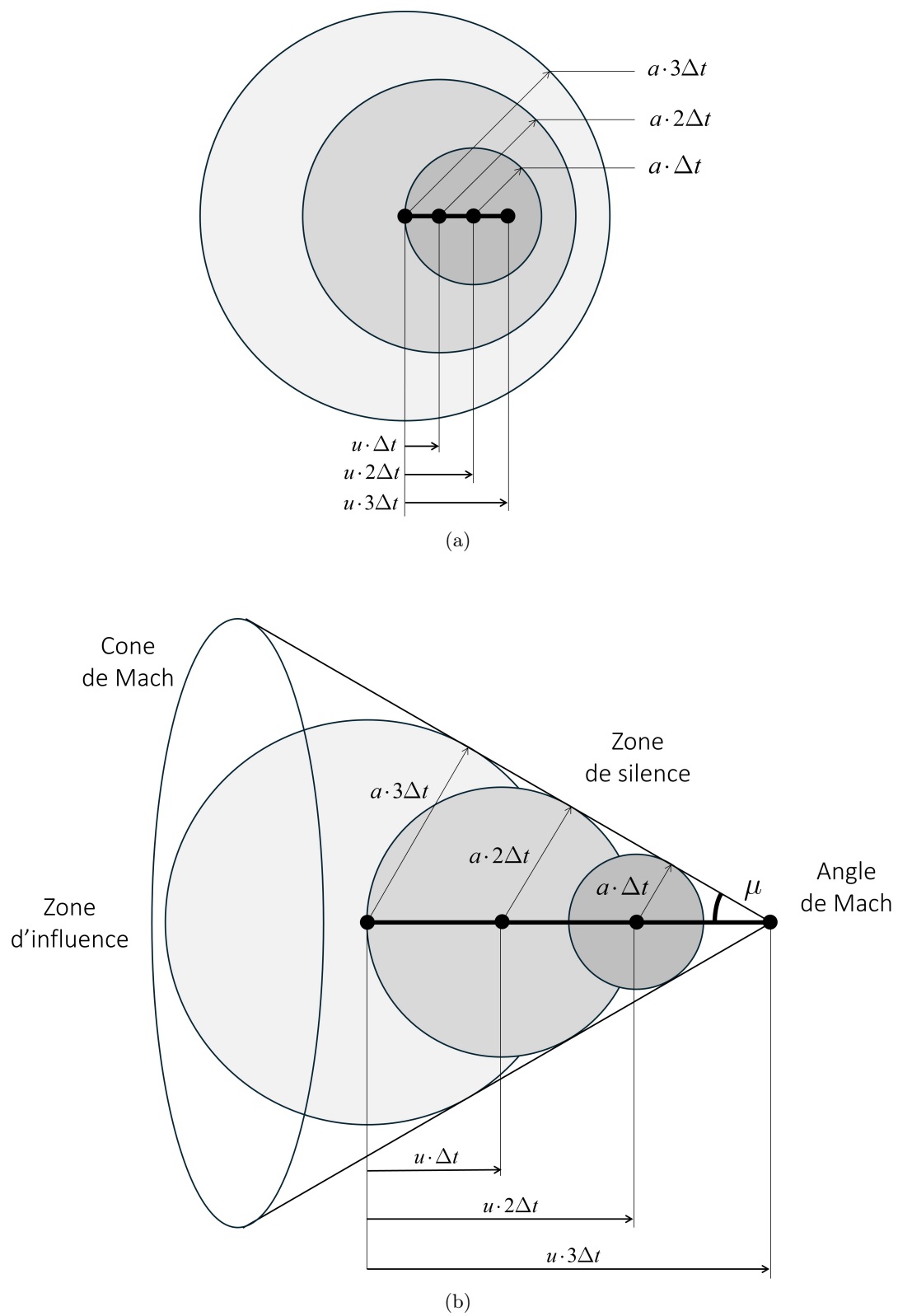


FIGURE 4.2 – Ondes acoustiques se propageant avec la vitesse du son a et émises par une source se déplaçant à vitesse (a) subsonique $u < a$, et (b) supersonique $u > a$.

Si les ondes acoustiques sont isentropiques, l'onde de Mach est également isentropique (on remarque sur le schéma que les ondes ne s'accumulent pas et donc que l'amplitude de pression reste similaire à celle d'une onde simple). C'est cet aspect qui différencie les ondes de Mach des ondes de choc, qui elles génèrent des différences de pression comparables à la pression du milieu ambiant. Une onde de Mach est donc une onde émise par une source de pression de faible intensité, avec une amplitude largement inférieure à la pression du milieu ambiant.

Il est important de remarquer que le bourdon (ou tout autre objet) supersonique génère un réseau complexe d'ondes de choc et de détente dans la région en proximité du corps. A une distance grande par rapport à la dimension du corps, les ondes de chocs et de détente interagissent pour former alors une onde de Mach isentropique. Ainsi, l'onde de Mach peut être vue comme la configuration d'ondes d'un véhicule supersonique à une échelle largement supérieure à la dimension du corps (qui agit alors comme une source acoustique de faible intensité à cette échelle). Le schéma sur la Figure 4.3 illustre ces idées.

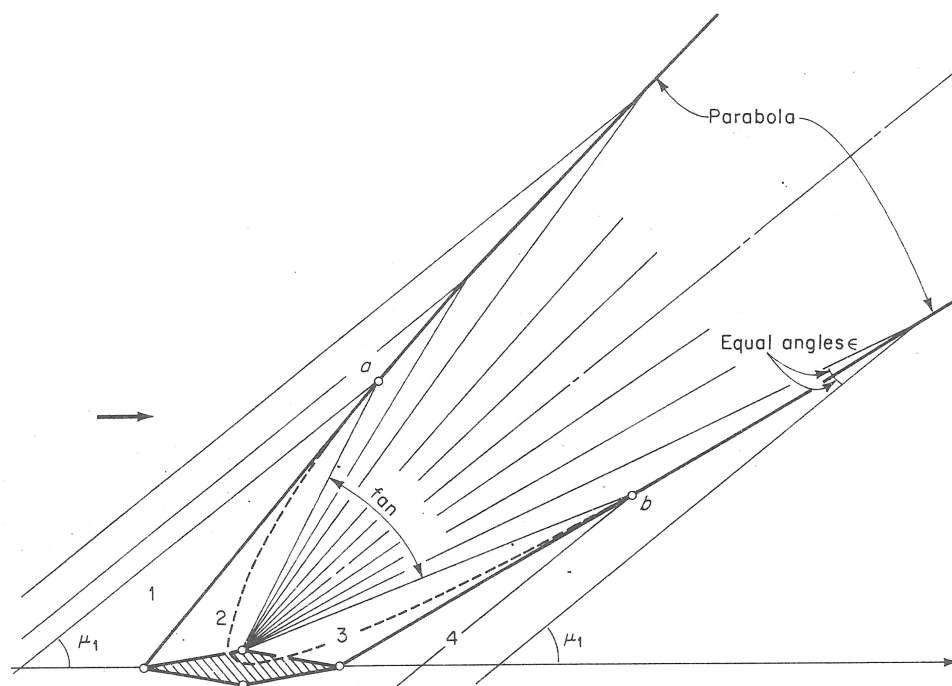


FIGURE 4.3 – Configuration d'ondes autour d'un corps non ponctuel (Thompson, 1972). Les ondes de Mach sont en trait fin, les ondes de choc en trait lourd. Loin du corps, les ondes de choc interagissent avec les ondes de Mach (contenues dans l'éventail de Prandtl-Meyer, *fan* sur le schéma) pour devenir des ondes de Mach, en intensité et en direction. Ainsi, à une échelle largement supérieure à la taille du corps, les ondes de chocs sont représentables par des ondes de Mach.

Physiquement, ces ondes peuvent être facilement rendues visibles dans un écoulement supersonique. Il suffit de placer une pointe d'aiguille dans l'écoulement ou de créer une aspérité sur une paroi parallèle à l'écoulement supersonique. La Figure 4.4 illustre ces ondes de Mach, générées par la faible épaisseur d'un bout de scotch collé sur la paroi, et rendues visibles par une technique de Schlieren (qui sera présentée dans un Chapitre ultérieur). Cette technique très simple permet d'ailleurs une évaluation du nombre de Mach de l'écoulement en fonction d'une mesure de l'angle formé par l'onde de Mach avec la direction de l'écoulement.

Une onde de Mach est également une représentation physique d'un objet mathématique que l'on appelle *caractéristique*, un outil permettant la résolution d'équations différentielles de type hyperboliques (décrivant les écoulements supersoniques). La méthode de résolution par caractéristiques se rencontrera dans un Chapitre ultérieur.



FIGURE 4.4 – Ondes de Mach dans une tuyère supersonique, générées par des bandes de scotch collées sur la paroi (Noca 1989, California Institute of Technology)

4.2 Equations de conservation en écoulement isentropique

4.2.1 Conservation de la quantité de mouvement : relation de Bernoulli

Selon les hypothèses admises (fluide non visqueux et forces volumiques négligeables), l'équation de conservation de la quantité de mouvement est celle d'Euler (3.15), soit

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p, \quad (4.5)$$

qui, pour un écoulement permanent, devient

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \nabla \frac{u^2}{2} - \mathbf{u} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (4.6)$$

Le terme de Lamb, $\mathbf{u} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{u})$, contient le vecteur tourbillon $\boldsymbol{\omega} = \nabla \wedge \mathbf{u}$, qui est compliqué à traiter de manière analytique. Comme le terme de Lamb est perpendiculaire au vecteur vitesse, une projection le long d'une ligne de courant (partout tangente au vecteur unitaire $\hat{\ell} = \mathbf{u}/u$) permet de s'en débarrasser, donnant ainsi

$$\hat{\ell} \cdot \nabla \frac{u^2}{2} + \frac{1}{\rho} \hat{\ell} \cdot \nabla p = 0, \quad (4.7)$$

ou encore

$$\frac{d}{dl} \left(\frac{u^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dl} = 0, \quad (4.8)$$

que l'on peut écrire sous forme différentielle (le long d'une ligne de courant)

$$u du + \frac{1}{\rho} dp = 0, \quad (4.9)$$

ou sous forme intégrée

$$\frac{u^2}{2} + \int \frac{1}{\rho} dp = C, \quad (4.10)$$

où C est une constante le long d'une ligne de courant. Cette relation représente la version *compressible* de la relation de Bernoulli rencontrée en écoulements incompressibles. En particulier, si la masse volumique est constante, l'intégrale peut être effectuée, et l'on retrouve bien la version familière de la relation de Bernoulli, $u^2/2 + p/\rho_0 = C$.

4.2.2 Conservation de l'énergie

Selon le Chapitre précédent, l'équation de conservation d'énergie peut s'écrire sous la forme (3.35), et après application des hypothèses d'un fluide non visqueux, d'un écoulement adiabatique, et de forces volumiques négligeables, prend la forme

$$\frac{Dh_0}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (4.11)$$

Pour des écoulements permanents, l'équation devient

$$\mathbf{u} \cdot \nabla h_0 = 0, \quad (4.12)$$

ce qui implique finalement

$$h_0 = h + \frac{u^2}{2} = C \quad (4.13)$$

où C est une constante le long d'une ligne de courant. La version différentielle (le long d'une ligne de courant) est

$$dh_0 = dh + u du = 0. \quad (4.14)$$

4.2.3 Comparaison des deux équations

Pour un écoulement isentropique, l'équation de conservation de quantité de mouvement et l'équation de conservation d'énergie sont redondantes. En effet, la relation de Gibbs $dh = Tds + vdp$ et la condition d'isentropie $ds = 0$ montre immédiatement

$$dh = vdp = \frac{1}{\rho} dp, \quad (4.15)$$

et qu'ainsi les deux Equations 4.9 et 4.14 sont identiques. La raison vient du fait que la condition d'isentropie fixe une des variables d'état (l'entropie, s), et que l'on se retrouve alors avec une inconnue de moins dans le problème, ce qui implique qu'une des deux équations est obligatoirement superflue.

4.3 Grandeurs caractéristiques d'un écoulement isentropique

4.3.1 Grandeurs d'arrêt, de réservoir, de stagnation, et totales

Une grandeur d'*arrêt* (ou de *stagnation* pour utiliser le terme anglais) est une grandeur définie en un point d'arrêt de l'écoulement. Un point d'arrêt de l'écoulement est un point où la vitesse est nulle, dans une configuration *permanente* et suite à un ralentissement (ou compression) *isentropique* de l'écoulement. Les grandeurs d'arrêt sont dénotées avec un indice "0". Ainsi, en un point d'arrêt, $u = u_0 = 0$.

Si les énergies potentielles (gravité) sont nulles ou négligeables, les grandeurs d'arrêt peuvent être assimilées à des valeurs *totales* (Chapitre 2). Très souvent en aérodynamique compressible, les grandeurs totales et les grandeurs d'arrêt sont utilisées de manière interchangeable, car les forces volumiques sont négligées.

Une valeur totale déjà rencontrée est l'enthalpie totale h_0 , qui correspond bien à la valeur de l'enthalpie h pour $u = 0$ dans la relation 4.13. L'enthalpie totale h_0 est donc constante le long d'une ligne de courant pour un écoulement permanent et isentropique.

La température, pression, et masse volumique sont des fonctions d'état de deux variables d'état, que l'on peut choisir comme étant l'enthalpie et l'entropie. Comme l'entropie est constante, les variables ne sont plus fonction que de l'enthalpie. En particulier, à l'enthalpie totale h_0 correspondra une pression totale p_0 , une température totale T_0 , et une masse volumique ρ_0 , toutes définies comme étant les valeurs pour une vitesse nulle de l'écoulement, pour autant que l'écoulement soit isentropique et permanent.

Par suite, le résultat précédent implique que la température T_0 est constante le long d'une ligne de courant pour un écoulement permanent et isentropique. Il en est de même pour la pression totale p_0 (et la masse volumique totale ρ_0).

La température totale, T_0 , peut être également interprétée comme étant la température dans un grand réservoir où la vitesse est nulle ($u = 0$) et servant à alimenter une tuyère (Figure 4.5). Pour cette raison, T_0 prend parfois le nom de température de *réservoir* (*reservoir* en anglais). Les autres grandeurs

totales, en particulier p_0 et ρ_0 , sont d'une manière analogue les valeurs de la pression et de la masse volumique dans le réservoir.

Une manière alternative de retrouver ces grandeurs totales est par ralentissement isentropique de l'écoulement jusqu'à atteindre une vitesse nulle, par exemple au niveau du "nez" d'un corps placé dans l'écoulement (Figure 4.5). Ce point est appelé point d'arrêt, et la température sur le nez du corps porte alors le nom de température d'arrêt (qui est identique à la température de réservoir servant à générer l'écoulement). Comme l'écoulement est isentropique, la pression et masse volumique ne dépendent que de la température. Ainsi, on définit également la pression totale p_0 et masse volumique totale ρ_0 comme les valeurs de la pression et de la masse volumique au point d'arrêt.

Les grandeurs totales sont mesurables expérimentalement assez simplement. Dans un réservoir, où la vitesse est nulle, de simples capteurs (de pression et de température) fournissent les valeurs désirées. Au sein d'un écoulement, un capteur (de pression ou de température) basé au point d'arrêt fournira les grandeurs totales. On parlera alors de capteur de pression totale et de température totale. Ce sujet sera développé plus amplement dans le cas d'un gaz parfait ci-dessous.

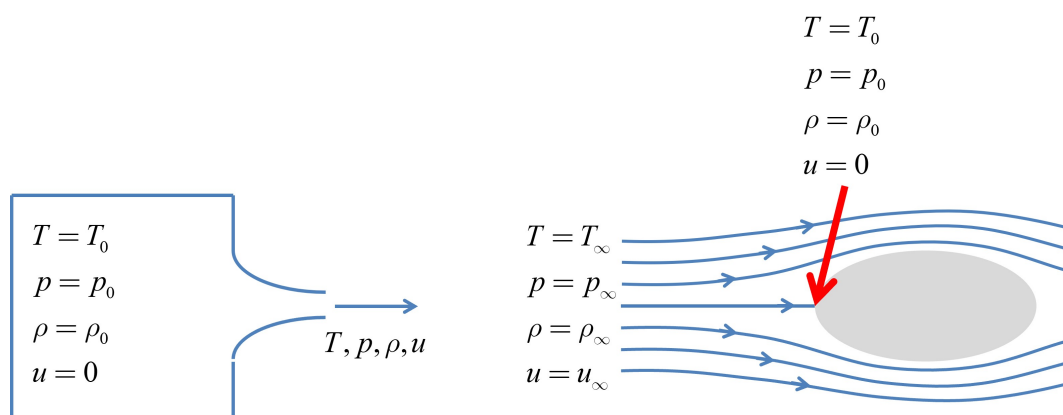


FIGURE 4.5 – Grandeurs d'arrêt, de stagnation, ou de réservoir (ou totales, en absence de forces volumiques) définies comme étant les valeurs des variables thermodynamiques dans un réservoir alimentant une tuyère, ou les valeurs en un point d'arrêt suite à un ralentissement ou une compression isentropique.

4.3.2 Grandeurs statiques

Les valeurs que l'on appelle statiques sont celles qui ne portent pas l'indice 0, telles p , T , et ρ . Elles correspondent aux valeurs thermodynamiques mesurées par un observateur se déplaçant localement avec l'écoulement (on peut imaginer l'observateur juché sur une montgolfière, entraînée librement par l'écoulement). L'observateur, muni de simples capteurs, serait alors au repos par rapport au fluide, et mesurerait ainsi les valeurs statiques de l'écoulement (le terme statique vient du fait que le fluide est au repos par rapport à l'observateur). Dans la pratique, il n'est pas possible de déplacer l'observateur avec l'écoulement. Une méthodologie simple pour la mesure de la pression statique est d'utiliser un orifice dans une paroi placée parallèlement à l'écoulement.

4.3.3 Grandeurs soniques

Un point sonique d'un écoulement est un point où la vitesse est égale à la vitesse locale du son. Une grandeur sonique est une grandeur définie en un point aux conditions soniques. Les grandeurs soniques sont notées avec un "*" en indice. En un point sonique, nous avons $u = u_* = a_*$.

4.4 Relation entre la vitesse et le nombre de Mach en écoulement isentropique

La relation de conservation de quantité de mouvement sous forme différentielle

$$u du + \frac{1}{\rho} dp = 0, \quad (4.16)$$

peut être modifiée par l'introduction de la vitesse du son a . Comme cette vitesse du son est une variable d'état et que l'écoulement est isentropique, la pression est fonction de cette seule variable (ou de son carré)

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial a^2} \right)_s da^2. \quad (4.17)$$

En utilisant le fait que

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \frac{-v^2}{\left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_s} \quad (4.18)$$

on trouve avec un peu d'algèbre

$$\left(\frac{\partial a^2}{\partial p} \right)_s = 2v \left[\frac{a^4}{2v^3} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2} \right)_s - 1 \right]. \quad (4.19)$$

Le terme au sein des parenthèses est une grandeur commune en écoulements compressibles et porte le nom de *dérivée fondamentale de la dynamique des gaz* (*fundamental gasdynamic derivative*), dénotée par le symbole Γ

$$\Gamma = \frac{a^4}{2v^3} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2} \right)_s. \quad (4.20)$$

Sa valeur pour différents fluides est donnée dans le Tableau ci-dessous. L'équation de conservation de quantité de mouvement prend alors la forme

$$u du + \frac{ada}{\Gamma - 1} = 0. \quad (4.21)$$

En introduisant le nombre de Mach $M = u/a$ écrit sous forme différentielle (par dérivée logarithmique)

$$\frac{dM}{M} = \frac{du}{u} - \frac{da}{a}, \quad (4.22)$$

la relation 4.21 devient

$$\frac{du}{u} = \frac{dM/M}{1 + (\Gamma - 1)M^2}. \quad (4.23)$$

Si $\Gamma \geq 1$, cette relation nous dit que le nombre de Mach varie d'une manière monotone avec la vitesse de l'écoulement (en particulier, si le nombre de Mach augmente, la vitesse aussi). Or, pour des fluides ordinaires, cette condition est toujours satisfaite (Tableau ci-dessous).

Fluide	Γ
Gaz Parfait	$(\gamma + 1)/2$
Liquide de Tait	$(k + 1)/2$
Eau	4.4
Ethanol	6.4

TABLE 4.1 – Valeurs de la dérivée fondamentale Γ à 1 Atm et 293.15 K.

4.5 Écoulement isentropique d'un gaz parfait

4.5.1 Conservation de quantité de mouvement : relation de Bernoulli

Pour un gaz calorifiquement parfait en écoulement isentropique, on utilise la relation $p \propto \rho^\gamma$, ce qui transforme l'équation de conservation de quantité de mouvement 4.10

$$\frac{u^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} = C, \quad (4.24)$$

qui représente la version *compressible* de la relation de Bernoulli pour un *gaz parfait*. Contrairement au cas des écoulements incompressibles, la masse volumique est ici variable !

4.5.2 Conservation d'énergie

Comme remarqué précédemment, en écoulement isentropique, l'équation de conservation d'énergie et de quantité de mouvement sont identiques. L'équation de conservation de quantité de mouvement peut être ré-écrite en fonction de la température (en faisant intervenir la loi des gaz parfaits)

$$\frac{u^2}{2} + \frac{\gamma r}{\gamma - 1} T = C. \quad (4.25)$$

En se souvenant que pour un gaz parfait $c_p = \gamma r / (\gamma - 1)$, on obtient une version alternative

$$c_p T + \frac{u^2}{2} = C. \quad (4.26)$$

Cette relation peut être obtenue directement à partir de l'équation de conservation d'énergie 4.13, puisque pour un gaz calorifiquement parfait ($c_p = \text{constante}$), et $h = c_p T + \text{const}$, produisant un résultat identique (Equation 4.26) à celui obtenu à partir de l'équation de conservation de quantité de mouvement.

4.5.3 Calcul des grandeurs statiques en fonction des grandeurs totales

La relation précédente (4.26) peut être ré-écrite en fonction de la température totale T_0

$$c_p T + \frac{u^2}{2} = c_p T_0. \quad (4.27)$$

laquelle, après avoir divisé les deux membres par $c_p T$, devient

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{u^2}{2c_p T}, \quad (4.28)$$

puis en introduisant la relation (2.101) pour c_p ainsi que (2.117) pour la vitesse du son a

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \left(\frac{u}{a} \right)^2 = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2, \quad (4.29)$$

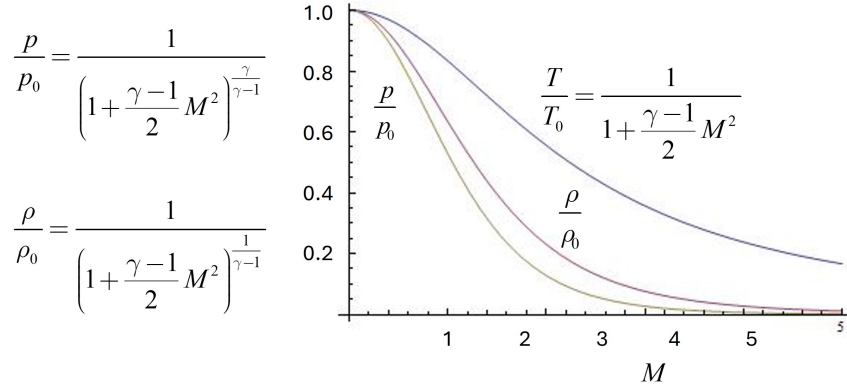
où la dernière égalité est obtenue par définition du nombre de Mach. Ensuite, en utilisant la relation isentropique (2.115) ainsi que l'équation d'état, nous avons la relation

$$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^\gamma = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}, \quad (4.30)$$

qui permet d'obtenir avec (4.29) les relations suivantes

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}, \quad (4.31)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}. \quad (4.32)$$

FIGURE 4.6 – Illustration des relations isentropiques, avec $\gamma = 1.4$.

De manière équivalente, les relations peuvent être écrites comme suit :

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2}, \quad \frac{p}{p_0} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}, \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}}. \quad (4.33)$$

Nous constatons que pour un écoulement isentropique (pas de choc qui provoquerait une augmentation d'entropie), les rapports T/T_0 , p/p_0 et ρ/ρ_0 ne dépendent que du nombre de Mach et des caractéristiques du fluide (valeur de γ). L'utilisation des grandeurs totales est très utile lors de l'étude des écoulements isentropiques.

En outre, la variation de la température, de la pression, et de la masse volumique est monotone avec une variation du nombre de Mach. En particulier, ces trois grandeurs *diminuent* avec une augmentation du nombre de Mach. Dans le Chapitre suivant, on observera ce phénomène dans le cas d'une tuyère conçue pour augmenter le nombre de Mach. Ce même phénomène se produit sur l'extrados (partie supérieure) d'un profil d'aile en écoulement transsonique : le nombre de Mach augmente (devenant parfois supersonique) et la température décroît (conduisant ainsi parfois à un phénomène de condensation).

4.5.4 Formulation en fonction de la vitesse du son

A partir des relations 4.24, 4.25, ou 4.27, on peut introduire la vitesse du son sous la forme γrT ou $\gamma p/\rho$, et ainsi obtenir (avec un point d'arrêt d'indice 0)

$$\frac{\gamma rT}{\gamma-1} + \frac{u^2}{2} = \frac{\gamma rT_0}{\gamma-1}, \quad (4.34)$$

ou

$$\frac{\gamma p/\rho}{\gamma-1} + \frac{u^2}{2} = \frac{\gamma p_0/\rho_0}{\gamma-1}. \quad (4.35)$$

et ainsi, avec $a = \sqrt{\gamma rT} = \sqrt{\gamma p/\rho}$ et $a_0 = \sqrt{\gamma rT_0} = \sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$

$$\frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{u^2}{2} = \frac{a_0^2}{\gamma-1}, \quad (4.36)$$

que l'on peut récrire en faisant apparaître le nombre de Mach

$$\frac{a^2}{a_0^2} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-1}, \quad (4.37)$$

ce qui signifie que la vitesse du son en un point donné d'un écoulement est une fonction du nombre de Mach. Ce type de formulation sera très utilisée par la suite, puisque le nombre de Mach caractérise l'effet de compressibilité dans un écoulement.

4.5.5 Formulation en fonction des grandeurs soniques

D'après les propriétés d'un point sonique, l'équation d'énergie (4.36) sur un tel point s'écrit

$$\frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2} = \frac{a_*^2}{\gamma - 1} + \frac{a_*^2}{2}, \quad (4.38)$$

soit

$$\frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2} = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} a_*^2, \quad (4.39)$$

que nous pouvons écrire sous la forme suivante de manière à déterminer le type d'écoulement en fonction des grandeurs soniques

$$\frac{u^2 - a_*^2}{2} = \frac{a_*^2 - a^2}{\gamma - 1}, \quad (4.40)$$

$$\begin{array}{llllll} \text{si} & u > a_* & \leftrightarrow & a_* > a & \rightarrow & u > a, \\ \text{si} & u < a_* & \leftrightarrow & a_* < a & \rightarrow & u < a, \end{array}$$

ce qui permet de voir si en un point l'écoulement est subsonique, sonique ou supersonique.

4.5.6 Calcul des grandeurs statiques en fonction des grandeurs soniques

Considérons maintenant un point de l'écoulement pour lequel la vitesse est sonique. Deux configurations classiques permettent d'illustrer ce concept.

Tout d'abord le cas d'un écoulement dans une tuyère alimentée par un réservoir à pression totale (vitesse nulle) donnée. Nous verrons dans l'étude du comportement de l'écoulement dans la tuyère, et selon le rapport de pression entre la pression du réservoir et la pression externe, si le col de la tuyère possède ou non cette propriété particulière. Lorsque l'écoulement dans le divergent devient supersonique, partiellement ou totalement, la vitesse au col ne change plus et est égale à la vitesse du son locale. Lorsque ces conditions sont vérifiées, on parle de grandeurs soniques au col pour la vitesse, la pression, la température, etc.

Une seconde configuration est celle de l'écoulement autour d'un avion, par exemple, qui est en vol transsonique, soit à un nombre de Mach proche de l'unité. Supposons qu'en un point quelconque autour de l'avion, la vitesse locale de l'écoulement puisse atteindre la vitesse locale du son. Si cette vitesse est atteinte en un point, sur une ligne ou une surface, nous parlerons de point, ligne ou surface sonique. Dans ce cas, nous avons la condition $M = 1$ et les relations (4.29), (4.31) puis (4.32) deviennent respectivement

$$\frac{T_*}{T_0} = \frac{2}{\gamma + 1}, \quad \frac{p_*}{p_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}, \quad \frac{\rho_*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}. \quad (4.41)$$

γ	Monoatomique 5/3 = 1.667	Diatomique 7/5 = 1.4	9/7 = 1.286
T_*/T_0	0.7499	0.8333	0.8750
p_*/p_0	0.4871	0.5283	0.5483
ρ_*/ρ_0	0.6495	0.6339	0.6267

TABLE 4.2 – Valeurs des grandeurs au point sonique par rapport aux grandeurs totales

Il reste, dans cette formulation, à introduire le nombre de Mach sonique pour lequel la vitesse du son est choisie aux grandeurs soniques

$$M_* = \frac{u}{a_*}. \quad (4.42)$$

Considérons l'équation d'énergie associée aux grandeurs soniques (4.39) et divisons la par u^2 de manière à obtenir

$$\frac{(a/u)^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} \frac{a_*^2}{u^2}, \quad (4.43)$$

qui, après réarrangement et introduction des nombres de Mach M et M_* devient

$$M^2 = \frac{2}{(\gamma + 1) / M_*^2 - (\gamma - 1)}, \quad (4.44)$$

et l'inverse est donnée par

$$M_*^2 = \frac{(\gamma + 1) M^2}{2 + (\gamma - 1) M^2}. \quad (4.45)$$

On peut vérifier que

$$\begin{aligned} M_* = 1 &\longleftrightarrow M = 1, \\ M_* < 1 &\longleftrightarrow M < 1, \\ M_* > 1 &\longleftrightarrow M > 1. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Par contre lorsque $M \rightarrow \infty$, M_* est fini. En effet, nous avons

$$\lim_{M \rightarrow \infty} M_* = \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right)^{1/2}, \quad (4.47)$$

qui, pour l'air avec $\gamma = 1.4$, donne $M_* = 2.4495$. L'utilisation des grandeurs soniques est très utile lors de l'étude des écoulements supersoniques dans des tuyères.

4.5.7 Détente dans le vide

Pour le cas d'un réservoir à une température totale T_0 (Figure 4.5) se déversant dans le vide ($p = 0$), il est possible de trouver les conditions en sortie de tuyère, en supposant que l'écoulement est isentropique. A partir de la relation 4.27

$$c_p T + \frac{u^2}{2} = c_p T_0, \quad (4.48)$$

il est possible de trouver la vitesse des gaz en sortie

$$u = \sqrt{2c_p(T_0 - T)}. \quad (4.49)$$

Avec un écoulement isentropique

$$u = \sqrt{2c_p T_0 \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}. \quad (4.50)$$

Ainsi, la vitesse maximale est atteignable quand $p = 0$ (vide)

$$u_{\max} = \sqrt{2c_p T_0}. \quad (4.51)$$

En utilisant $a_0 = (\gamma r T_0)^{1/2}$ et $c_p = \gamma r / (\gamma - 1)$, on trouve finalement

$$u_{\max} = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}} a_0. \quad (4.52)$$

Bien que cette vitesse soit finie, d'autres grandeurs ne le sont pas, comme le nombre de Mach de sortie qui lui tend vers l'infini (car la température de sortie tend vers zéro). Dans le paragraphe précédent, on a trouvé que dans ces conditions M_* tend vers une valeur finie également.

Pour une tuyère de fusée, cette vitesse de sortie correspond à l'impulsion spécifique (specific impulse) que l'on désire maximale. En ré-écrivant cette relation

$$u_{\max} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{R}{\mathcal{M}} T_0}, \quad (4.53)$$

on voit qu'un gaz de petite masse molaire et un rapport de chaleurs spécifiques γ tendant vers 1 est désirable.

4.6 Quand un écoulement est-il compressible ?

Nous avons vu en introduction que le nombre de Mach est la grandeur caractéristique de la compressibilité d'un écoulement. Au chapitre 2, le nombre de Mach a été interprété comme le rapport des contraintes d'inertie et élastiques (2.83). Nous allons maintenant donner une autre interprétation au nombre de Mach basée sur un raisonnement dimensionnel.

Pour cela, nous rappelons l'équation de conservation de la quantité de mouvement dans le cas des hypothèses admises dans ce chapitre (4.9)

$$u du + \frac{1}{\rho} dp = 0, \quad (4.54)$$

ou sous forme intégrée :

$$\frac{u^2}{2} + \int \frac{1}{\rho} dp = C. \quad (4.55)$$

En partant de conditions de réservoir avec pression p_0 et densité ρ_0 , on suppose une petite accélération de l'écoulement vers une vitesse u , une pression $p = p_0 + \delta p$, densité $\rho = \rho_0 + \delta \rho$, dont nous déduisons que

$$\frac{u^2}{2} + \int_{p_0}^p \frac{\delta p'}{\rho_0 + \delta \rho'} = 0 \quad (4.56)$$

Avec :

$$\int_{p_0}^p \frac{\delta p'}{\rho_0 + \delta \rho'} \sim \int_{p_0}^p \frac{\delta p'}{\rho_0} \left(1 - \frac{\delta \rho'}{\rho_0}\right) \sim \frac{1}{\rho_0} \int_{p_0}^p \delta p' = \frac{1}{\rho_0} (p - p_0) = \frac{1}{\rho_0} \delta p \quad (4.57)$$

nous en déduisons :

$$\delta p \sim -\rho_0 \frac{u^2}{2}. \quad (4.58)$$

Par ailleurs, à partir de l'expression de la vitesse du son et du fait que l'écoulement est isentropique, nous en déduisons :

$$\delta p \sim a^2 \delta \rho, \quad (4.59)$$

ce qui par élimination de δp avec (4.58) nous permet d'écrire

$$\frac{\delta \rho}{\rho_0} \sim -\frac{1}{2} M^2. \quad (4.60)$$

Ainsi, le nombre de Mach représente une mesure des variations relatives de masse volumique par rapport aux variations du nombre de Mach (pour des petites valeurs du nombre de Mach), soit l'erreur qu'on commet en considérant une masse volumique constante. Un fluide dont la vitesse est faible comparée à la vitesse du son se comporte comme s'il était incompressible. Le nombre de Mach M apparaissant au carré, cela implique qu'alors $\delta \rho / \rho_0$ n'est pas nécessairement petit. En fait si M est inférieur à environ 0.3, la variation de la masse volumique est de quelques pour cent et par suite l'on peut sans grande erreur adopter l'hypothèse d'incompressibilité pour l'écoulement.

Il est possible de déduire ces résultats d'une manière rigoureuse.

L'équation de Bernoulli généralisée aux écoulements compressibles pour un gaz parfait (Equation 4.24) fournit une relation entre la pression et la vitesse

$$\frac{u^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0}{\rho_0}. \quad (4.61)$$

La pression dynamique a perdu sa signification physique dans le cas de l'écoulement compressible, puisque ce n'est plus la différence entre la pression totale et la pression statique. D'après les relations isentropiques, on a

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}. \quad (4.62)$$

On effectue un développement binomial de cette expression pour des nombres de Mach faibles

$$\frac{p_0}{p} = 1 + \frac{\gamma}{2} M^2 + \frac{\gamma}{8} M^4 + \frac{\gamma(2 - \gamma)}{48} M^6 + \dots, \quad (4.63)$$

M	0.1	0.2	0.3
$\frac{p_0 - p}{\frac{1}{2}\rho_0 u^2}$	0.9975	0.9901	0.9781

TABLE 4.3 – Effets de compressibilité de l'air ($\gamma = 1.4$) en fonction du nombre de Mach.

que l'on peut ré-écrire

$$p_0 = p + p \left(\frac{\gamma}{2} M^2 + \frac{\gamma}{8} M^4 + \frac{\gamma(2-\gamma)}{48} M^6 + \dots \right), \quad (4.64)$$

soit

$$p_0 = p + \frac{\gamma p}{2} M^2 \left(1 + \frac{1}{4} M^2 + \frac{2-\gamma}{24} M^4 + \dots \right). \quad (4.65)$$

Or, à l'aide de l'expression de la vitesse du son et de la définition du nombre de Mach,

$$\frac{\gamma p}{2} M^2 = \frac{\gamma p}{2} \frac{u^2}{\gamma p / \rho} = \frac{1}{2} \rho u^2. \quad (4.66)$$

on obtient

$$p_0 = p + \frac{1}{2} \rho u^2 \left(1 + \frac{1}{4} M^2 + \frac{2-\gamma}{24} M^4 + \dots \right), \quad (4.67)$$

qui peut s'exprimer

$$p_0 = p + \frac{1}{2} \rho_0 u^2 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) \left(1 + \frac{1}{4} M^2 + \frac{2-\gamma}{24} M^4 + \dots \right). \quad (4.68)$$

En utilisant

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-\frac{1}{\gamma-1}}, \quad (4.69)$$

et après un développement binomial

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 - \frac{1}{2} M^2 + \frac{\gamma}{8} M^4 + \dots, \quad (4.70)$$

il en résulte la relation finale suivante

$$p_0 = p + \frac{1}{2} \rho_0 u^2 \left(1 - \frac{1}{4} M^2 + \frac{2\gamma-1}{24} M^4 + \dots \right). \quad (4.71)$$

Pour $M = 0$, on retrouve la relation de Bernoulli pour un écoulement incompressible. Le terme en parenthèse est donc un terme correctif à la relation de Bernoulli et donne une indication du degré de compressibilité

$$\frac{p_0 - p}{\frac{1}{2} \rho_0 u^2} = 1 - \frac{1}{4} M^2 + \frac{2\gamma-1}{24} M^4 + \dots \quad (4.72)$$

On constate que pour les petites valeurs de M la correction est faible. Quelques valeurs du facteur correctif pour quelques valeurs du nombre de Mach M sont données dans le Tableau (pour de l'air). La convention est de négliger les effets dus à la compressibilité pour des nombres de Mach inférieurs à 0.3.

4.7 Mesures en écoulements compressibles et isentropiques

En écoulements compressibles et isentropiques (sans onde de choc), il est possible de mesurer la pression totale p_0 , la pression statique p , ainsi que la température totale T_0 . La connaissance empirique de ces trois quantités permet alors l'évaluation du nombre de Mach, de la vitesse, et de la température à travers l'utilisation des relations isentropiques.

Le nombre de Mach est calculable à partir de la relation suivante (qu'on appelle équation du tube de Pitot subsonique)

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}. \quad (4.73)$$

Une mesure de la température totale T_0 permet d'en déduire la valeur de la température statique T à partir de

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2. \quad (4.74)$$

Il est alors possible d'évaluer la vitesse

$$u = M \sqrt{\gamma r T}. \quad (4.75)$$

Une manipulation de ces relations produit le résultat suivant

$$u = \sqrt{\frac{2\gamma r T_0}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}\right]}. \quad (4.76)$$

La pression dynamique locale vaut alors

$$\frac{1}{2} \rho u^2 = \frac{\gamma p}{2} M^2. \quad (4.77)$$

Chapitre 5

Ecoulements quasi-unidimensionnels isentropiques permanents

Dans ce chapitre, nous allons étudier le cas d'écoulements quasi-unidimensionnels compressibles permanents de fluides idéaux. Les résultats obtenus seront applicables au cas d'un écoulement isentropique dans une tuyère ou dans une soufflerie supersonique. Ils mettront en évidence les principes essentiels permettant à l'écoulement de passer d'un régime subsonique à un régime supersonique (et viceversa). Comme dans le chapitre précédent, nous faisons l'hypothèse que le fluide est dénué de viscosité, et que l'écoulement n'est pas soumis à des forces volumiques, au rayonnement et qu'il est adiabatique. Nous verrons dans des chapitres ultérieurs qu'il existe des régimes d'écoulement dans une tuyère où des ondes de chocs peuvent apparaître. De plus, à la sortie d'une tuyère, l'écoulement sera parfois dévié de sa trajectoire et perdra ainsi sa configuration quasi-unidimensionnelle au profit d'un réseau d'ondes de détentes et de choc.

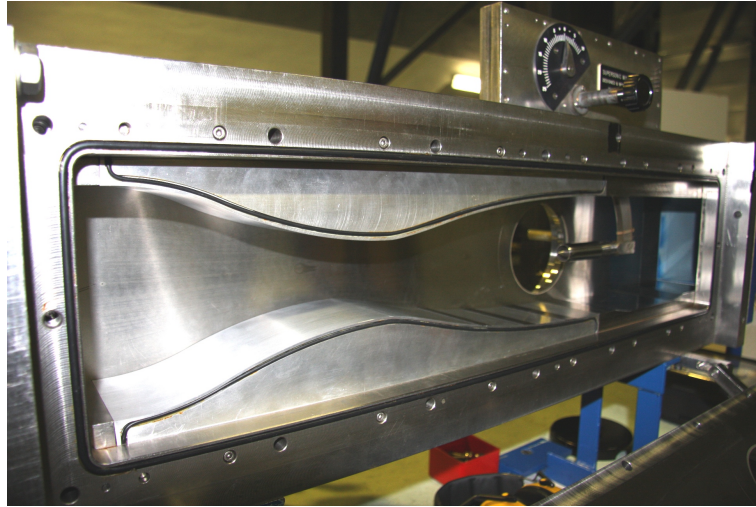


FIGURE 5.1 – Veine d'essai d'une soufflerie supersonique (hepia, Genève)

5.1 Equations de conservation quasi-unidimensionnelles

Considérons l'écoulement stationnaire d'un fluide parfait dans une conduite de section A variable selon l'abscisse curviligne x située au centre de la conduite.

Si $r(x)$ représente une mesure de la section telle que le rayon ou la demi-hauteur, et si $\Phi(x)$ est le rayon de courbure de la paroi, nous supposons dans cette approximation que

$$\frac{dr}{dx} \ll 1 \quad \text{et} \quad \frac{r}{\Phi} \ll 1, \quad (5.1)$$

Ces conditions peuvent évidemment être satisfaites par un *tube de courant* (surface tubulaire, tangente à une famille de lignes de courants) qui peut être choisi comme infiniment petit. Ainsi, pour des lignes de courants tridimensionnelles connues a priori, la théorie qui suit s'y appliquera.

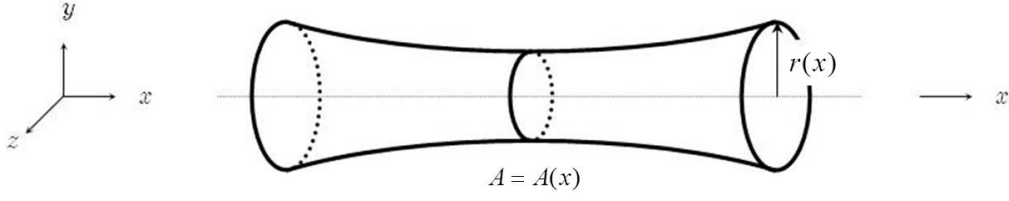


FIGURE 5.2 – Paramètres d'une tuyère ou d'un tube de courant conduisant à l'hypothèse d'un écoulement quasi-monodimensionnel

Si les hypothèses 5.1 sont satisfaites, alors il est possible d'idéaliser l'écoulement réel tridimensionnel par un écoulement quasi-monodimensionnel. Un tel écoulement quasi-monodimensionnel permet d'admettre les simplifications suivantes pour le champ de vitesse $\mathbf{u} = (u, v, w)$

$$\begin{aligned} u = u(x, y, z) &\longrightarrow u = u(x), \\ v = v(x, y, z) &\longrightarrow v = 0, \\ w = w(x, y, z) &\longrightarrow w = 0, \end{aligned} \quad (5.2)$$

et pour les champs scalaires

$$\begin{aligned} p = p(x, y, z) &\longrightarrow p = p(x), \\ \rho = \rho(x, y, z) &\longrightarrow \rho = \rho(x), \\ e = e(x, y, z) &\longrightarrow e = e(x), \\ T = T(x, y, z) &\longrightarrow T = T(x). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Il est bien évident que la condition de variations faibles de la section selon l'axe de la conduite n'est pas la seule condition qui permette d'idéaliser l'écoulement comme étant monodimensionnel. Pour des fluides réels (avec viscosité), le profil de vitesse n'est pas uniforme à cause de l'adhérence du fluide à la paroi (écoulement dit de Poiseuille pour une conduite, Figure 5.3). Ainsi, l'hypothèse d'un écoulement monodimensionnel demande aussi que le fluide soit dénué de viscosité.

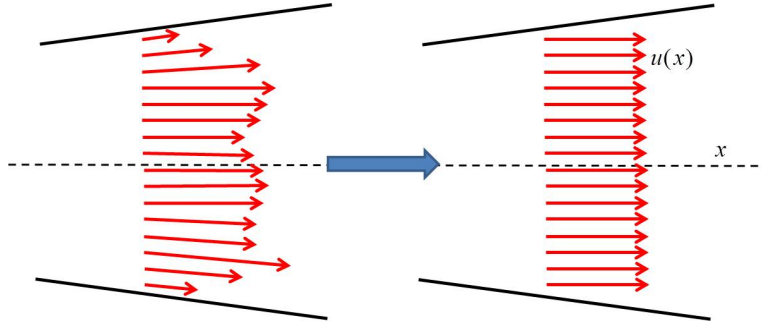


FIGURE 5.3 – Idéalisation d'un écoulement réel par un écoulement quasi-unidimensionnel

5.1.1 Conservation de la masse

Pour un volume de contrôle comme représenté sur la Figure 5.4, l'équation de conservation de masse tridimensionnelle (3.1) s'écrit sous la forme

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0. \quad (5.4)$$

Pour un écoulement permanent et quasi-monodimensionnel, l'équation précédente devient

$$(\rho u A)_{x+\Delta x/2} - (\rho u A)_{x-\Delta x/2} = 0, \quad (5.5)$$

où l'on a fait intervenir le fait que seule la composante de vitesse selon x intervient, que la pente de la paroi est si faible que la vitesse radiale est nulle, et qu'il n'y a pas d'écoulement selon la normale à la

paroi. En divisant par Δx et en laissant tendre Δx vers zéro, on obtient

$$\frac{d}{dx}(\rho u A) = 0. \quad (5.6)$$

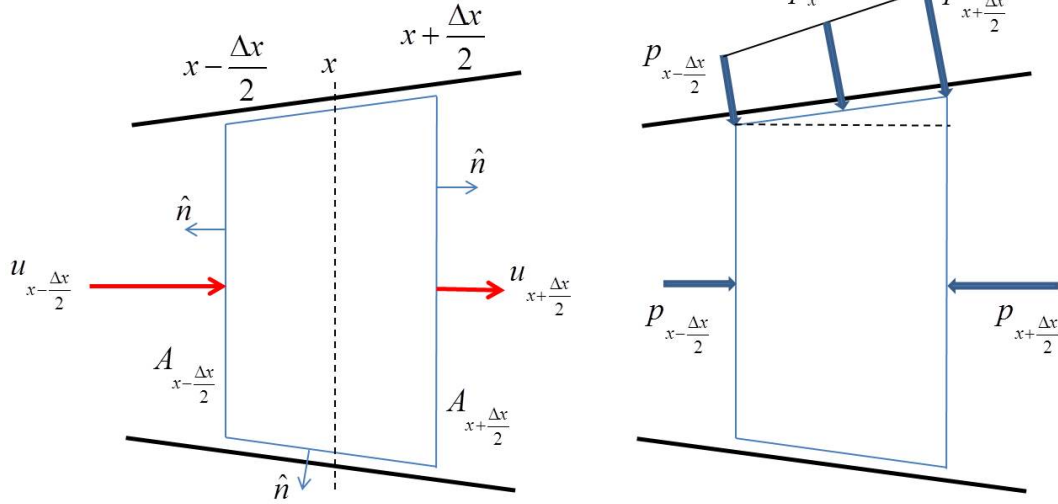


FIGURE 5.4 – Volume de contrôle

5.1.2 Conservation de la quantité de mouvement

Les hypothèses générales (fluide dénué de viscosité et écoulement sans forces volumiques) nous permettent d'écrire l'équation de conservation de la quantité de mouvement tridimensionnelle (3.4) sous la forme

$$\int_V \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} dV + \int_S (\rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \mathbf{u} dS = - \int_S p \hat{\mathbf{n}} dS. \quad (5.7)$$

Contrairement à l'intégrale de surface faisant intervenir la vitesse normale à la paroi $\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}$, qui alors s'annule sur les parois latérales de la tuyère, l'intégrale de surface de la pression doit être considérée même sur les parois latérales. Pour un écoulement permanent monodimensionnel, on a alors pour la composante selon x de la conservation de quantité de mouvement (en projetant selon x la force de pression sur les parois latérales)

$$(\rho u^2 A)_{x+\Delta x/2} - (\rho u^2 A)_{x-\Delta x/2} = - (pA)_{x+\Delta x/2} + (pA)_{x-\Delta x/2} + p_x (A_{x+\Delta x/2} - A_{x-\Delta x/2}), \quad (5.8)$$

où le dernier terme a été obtenu en supposant une variation linéaire de la pression sur les parois latérales (pour Δx petit) et les principes élémentaires de l'hydrostatique pour la pression résultante. En divisant par Δx et en laissant Δx tendre vers zéro, on obtient

$$\frac{d}{dx}(\rho u^2 A) = - \frac{d}{dx}(pA) + p \frac{dA}{dx}. \quad (5.9)$$

En développant les dérivées selon x

$$u \frac{d}{dx}(\rho u A) + \rho u A \frac{du}{dx} = -A \frac{dp}{dx} - p \frac{dA}{dx} + p \frac{dA}{dx}, \quad (5.10)$$

et en utilisant l'équation de conservation de masse $d/dx(\rho u A) = 0$ (Equation 5.6), l'équation de conservation de quantité de mouvement devient

$$\rho u \frac{du}{dx} = - \frac{dp}{dx}. \quad (5.11)$$

Il est à remarquer que cette relation ne fait pas intervenir la section de la tuyère, contrairement à l'équation de conservation de masse. Cette équation est en fait la version unidimensionnelle de l'équation d'Euler pour un écoulement permanent.

5.1.3 Conservation de l'énergie

Les hypothèses générales (écoulement permanent, adiabatique, sans rayonnement, et fluide dénué de viscosité) permettent d'obtenir d'une manière analogue

$$\frac{dh_0}{dx} = 0, \quad (5.12)$$

où h_0 est l'enthalpie totale $h_0 = h + 1/2u^2$.

5.1.4 Résumé des équations pour un écoulement quasi-unidimensionnel permanent isentropique

$$\begin{aligned} \frac{d(\rho u A)}{dx} &= 0 \\ \rho u \frac{du}{dx} &= -\frac{dp}{dx} \\ h_0 &= \text{const} \end{aligned} \quad (5.13)$$

5.2 Écoulement dans un tube de section variable

5.2.1 Effets de la variation de section

Etant donné que les variables ne dépendent que de x , les équations de conservation peuvent s'écrire sous la forme différentielle suivante

— Conservation de la masse

$$d(\rho u A) = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dA}{A} = 0, \quad (5.14)$$

— Conservation de la quantité de mouvement

$$\rho u du = -dp, \quad (5.15)$$

— Conservation de l'énergie

$$dh + u du = 0. \quad (5.16)$$

Nous allons éliminer la masse volumique entre les différentes relations, et en particulier dans (5.14). Pour cela, réécrivons l'équation de conservation de la quantité de mouvement (5.15) sous la forme

$$\frac{dp}{\rho} = \frac{dp}{d\rho} \frac{d\rho}{\rho} = -u du, \quad (5.17)$$

puis en se servant du fait que l'écoulement est isentrope, nous avons

$$\frac{dp}{d\rho} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = a^2, \quad (5.18)$$

ce qui nous permet d'écrire (5.17) sous la forme

$$\frac{dp}{\rho} = a^2 \frac{d\rho}{\rho} = -u du, \quad (5.19)$$

dont nous déduisons à l'aide de la définition du nombre de Mach

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{u du}{a^2} = -\frac{u^2 du}{a^2 u} = -M^2 \frac{du}{u}. \quad (5.20)$$

La substitution de (5.20) dans (5.14) permet ensuite d'aboutir à

$$\frac{dA}{A} = (M^2 - 1) \frac{du}{u}, \quad (5.21)$$

dont il est possible de déduire les relations

$$\frac{dA}{A} = -\frac{M^2 - 1}{\gamma M^2} \frac{dp}{p}, \quad (5.22)$$

et

$$\frac{dA}{A} = \frac{M^2 - 1}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \frac{dM}{M}. \quad (5.23)$$

L'expression (5.21) traduit la relation entre la variation de section et la variation de vitesse qui dépend du nombre de Mach. De manière analogue, on obtient

$$\frac{da}{a} = -\frac{\gamma - 1}{2} M^2 \frac{du}{u}, \quad (5.24)$$

ainsi qu'une relation déjà obtenue dans le chapitre précédent

$$\frac{du}{u} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \frac{dM}{M}. \quad (5.25)$$

Ceci nous permet de distinguer les quatre cas représentés à la Figure 5.5.

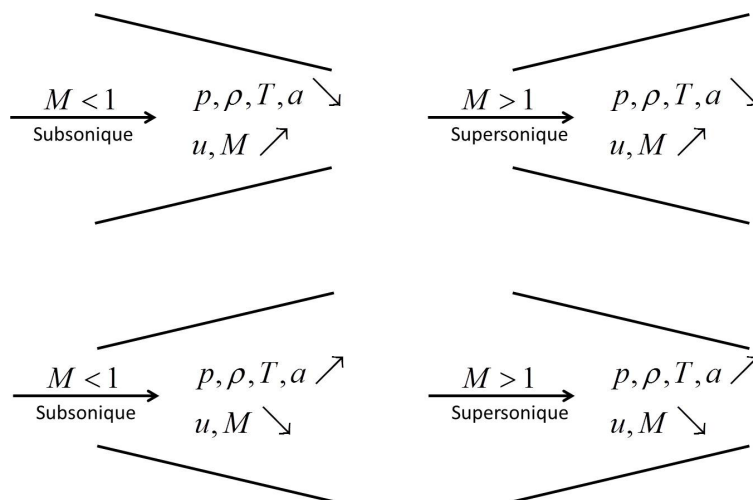


FIGURE 5.5 – Comportement de l'écoulement dans une tuyère en fonction du nombre de Mach et de la géométrie

Écoulement subsonique Lorsque l'écoulement est subsonique $(M^2 - 1) < 0$, une augmentation de section entraîne une diminution de la vitesse et inversement. Ainsi, pour un écoulement subsonique compressible, pour augmenter la vitesse, il faut un canal convergent et pour diminuer la vitesse, le canal doit être divergent.

Écoulement supersonique Dans ce cas, $(M^2 - 1) > 0$. Par conséquent, une augmentation de vitesse est associée à une augmentation de section. De même, une diminution de vitesse est associée à une diminution de surface. Ainsi, pour un écoulement supersonique, pour augmenter la vitesse, il faut un divergent, et pour la diminuer, il faut un convergent. On a un comportement inverse par rapport aux écoulements subsoniques.

Ecoulement sonique On a alors $dA = 0$, même si l'on a une variation de vitesse. Cela correspond à un extremum local de la distribution de section en fonction de x . Physiquement, cela correspond à une section minimale. Cette section minimale est le col de la tuyère comme on le montre plus loin. Quelque soit l'écoulement supersonique qui passe dans le divergent de la tuyère, l'écoulement sera toujours sonique au col, c'est-à-dire qu'à cet endroit $M = 1$. L'inverse est vrai, si l'on veut ralentir de manière isentrope un écoulement supersonique vers un régime subsonique, on doit d'abord ralentir l'écoulement dans un convergent, et, dès que le régime sonique est atteint, on doit continuer à le décélérer vers des vitesses subsoniques dans un divergent. On a alors un diffuseur.

Les différents comportements de l'écoulement en fonction de la variation de section et du nombre de Mach exprimés par les relations peuvent être résumés dans le tableau ci-dessous.

dA/A	—	—	+	+
M	< 1	> 1	< 1	> 1
du/u	+	—	—	+
dM/M	+	—	—	+
dp/p	—	+	+	—
$d\rho/\rho$	—	+	+	—
dT/T	—	+	+	—
da/a	—	+	+	—

TABLE 5.1 – Comportement des écoulements quasi-monodimensionnels.

Quelques remarques s'imposent.

* Les variations de vitesse du/u suivent toujours les variations du nombre de Mach dM/M .

* Les variables thermodynamiques p , T , ρ , et $a = \sqrt{\gamma r T}$ varient dans le même sens, opposé à celui de M et u .

5.2.2 Conditions au col

Afin que l'écoulement passe de manière continue du régime subsonique au régime supersonique, il doit exister un point (une section) pour laquelle le nombre de Mach doit être égal à 1. Nous avons vu précédemment que cette section correspond à un extremum local de la section de sorte que $dA = 0$. Considérons la relation (5.23) que nous écrivons sous la forme

$$\frac{1}{M} \frac{dM}{dx} = \left[\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{A} \right] \frac{1}{M^2 - 1} \frac{dA}{dx}. \quad (5.26)$$

Nous nous intéressons au cas où $M \rightarrow 1$ et $\frac{dA}{dx} \rightarrow 0$. Nous appliquons alors la règle de l'Hospital pour déterminer

$$\lim_{M \rightarrow 1, \frac{dA}{dx} \rightarrow 0} \frac{1}{M} \frac{dM}{dx} = \left[\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{A} \right]_{M=1} \frac{\frac{d^2 A}{dx^2}}{2M \frac{dM}{dx}}, \quad (5.27)$$

dont nous déduisons facilement la relation

$$\lim_{M \rightarrow 1, \frac{dA}{dx} \rightarrow 0} \left(\frac{dM}{dx} \right)^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{A} \right]_{M=1} \frac{d^2 A}{dx^2} = \frac{(1 + \gamma)}{4A} \frac{d^2 A}{dx^2}. \quad (5.28)$$

Pour qu'une solution physique existe, le membre de droite doit être positif. Il faut donc, $1 + \gamma$ étant positif, que $\frac{d^2 A}{dx^2}$ le soit aussi. Ceci correspond donc bien à un minimum de la section. Par suite, le nombre de Mach ne peut atteindre la valeur de 1 qu'à la section minimum de la tuyère, c'est-à-dire au col. Ainsi, le fluide est accéléré du repos dans le convergent ($dA < 0$), passe à Mach $M = 1$ au col ($dA = 0$), et continue à accélérer dans la partie divergente ($dA > 0$).

5.2.3 Relation entre une section et la section au col

Supposons que le rapport de pression entre la pression de réservoir et la pression de sortie soit telle que l'écoulement soit sonique au col. La section au col sera notée par la suite A_* puisque l'écoulement au col est aux conditions soniques. De la même manière, le nombre de Mach et la vitesse au col sont notés par M_* et u_* . Comme l'écoulement est sonique au col, l'écoulement dans cette section vérifie les relations

$$M = M_* = 1 \quad \text{et} \quad u_* = a_*. \quad (5.29)$$

Dans toute autre section d'une tuyère, les variables sont notées A , M et u . L'équation de conservation de la masse sous forme intégrale écrite entre la section au col et une quelconque autre section devient

$$\rho_* u_* A_* = \rho u A, \quad (5.30)$$

or, la relation (5.30) s'écrit aussi sous la forme

$$\frac{A}{A_*} = \frac{\rho_*}{\rho} \frac{a_*}{u} = \frac{\rho_*}{\rho_0} \frac{\rho_0}{\rho} \frac{a_*}{u}. \quad (5.31)$$

La masse volumique ρ_0 totale est constante dans tout l'écoulement isentrope. Rappelons la relation isentrope

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{1/(\gamma-1)}, \quad (5.32)$$

et son expression aux conditions soniques

$$\frac{\rho_*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{1/(\gamma-1)}, \quad (5.33)$$

ainsi que la définition de M_* et son expression fonction du nombre de Mach M

$$M_*^2 = \left(\frac{u}{a_*}\right)^2 = \frac{\frac{\gamma+1}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}. \quad (5.34)$$

En élevant (5.31) au carré, nous faisons apparaître

$$\left(\frac{A}{A_*}\right)^2 = \left(\frac{\rho_*}{\rho} \frac{a_*}{u}\right)^2 = \left(\frac{\rho_*}{\rho_0}\right)^2 \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 \left(\frac{a_*}{u}\right)^2, \quad (5.35)$$

de manière à substituer les relations (5.32), (5.33) et (5.34) pour obtenir

$$\left(\frac{A}{A_*}\right)^2 = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{2/(\gamma-1)} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{2/(\gamma-1)} \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{\frac{\gamma+1}{2} M^2}\right), \quad (5.36)$$

qui se simplifie sous la forme

$$\frac{A}{A_*} = \frac{1}{M} \left[\frac{2}{\gamma+1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right) \right]^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)}. \quad (5.37)$$

Cette relation est très importante et est illustrée en Figure 5.6. Le nombre de Mach dans une section quelconque de la tuyère est une fonction du rapport de la section locale à la section au col aux conditions soniques. Comme $A < A_*$ n'est pas physiquement possible, on a toujours la condition $A \geq A_*$. D'autre part, on a deux valeurs de M pour chaque rapport de section. Lorsque M est subsonique le rapport A/A_* décroît et tend vers 1. Lorsque M est supersonique le rapport A/A_* croît.

En introduisant la relation isentrope (4.31) dans (5.37), il vient

$$\frac{A_*}{A} = \left(\frac{2}{\gamma-1}\right)^{1/2} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{-(\gamma+1)/2(\gamma-1)} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/\gamma} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\gamma-1/\gamma}\right]^{1/2}, \quad (5.38)$$

qui nous permet de remarquer que $\frac{A_*}{A}$ prend sa valeur maximale égale à l'unité pour la valeur de $\frac{p}{p_0} = \frac{p_*}{p_0}$ correspondant à $M = 1$.

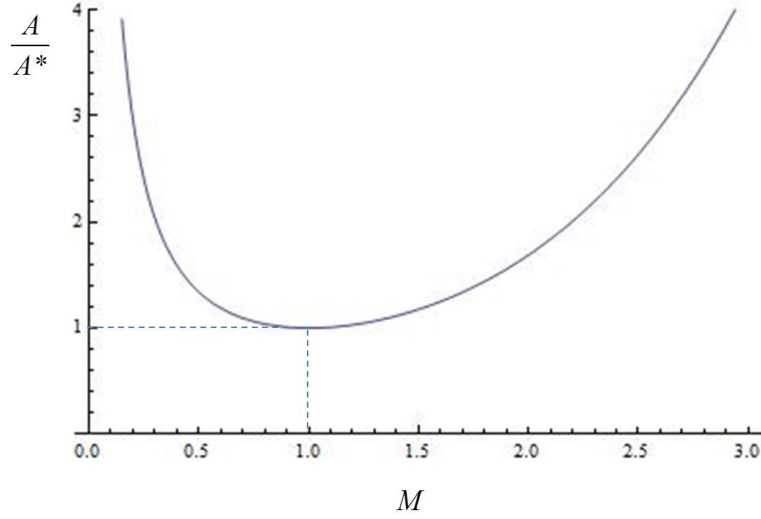


FIGURE 5.6 – Rapport de la section locale à la section au col en fonction du nombre de Mach pour $\gamma = 1.4$.

5.2.4 Débit-masse

L'équation de conservation de la masse pour les écoulements quasi-monodimensionnels exprime la conservation du débit-masse dans chaque section du tube. En notant le débit-masse par \dot{m} , il s'exprime par la relation

$$\dot{m} = \rho u A, \quad (5.39)$$

que nous aimerions exprimer en fonction du nombre de Mach et du fluide (γ). Pour cela, nous faisons apparaître, dans la relation précédente, les grandeurs

$$\dot{m} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{u}{a} a \rho_0 A = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{u}{a} \sqrt{\gamma r T} \rho_0 A, \quad (5.40)$$

ce qui nous permet d'aboutir à la formulation

$$\dot{m} = \frac{\rho}{\rho_0} M \sqrt{\gamma r T_0 \frac{T}{T_0} \frac{p_0}{r T_0}} A = \gamma M \frac{\rho}{\rho_0} \sqrt{\frac{T}{T_0}} \sqrt{\frac{1}{\gamma r T_0}} p_0 A, \quad (5.41)$$

soit

$$\dot{m} = \gamma M \frac{\rho}{\rho_0} \sqrt{\frac{T}{T_0}} \frac{p_0}{a_0} A. \quad (5.42)$$

En se servant des relations isentropes pour exprimer les rapports de pression et de température, nous obtenons

$$\dot{m} = \gamma M \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{a_0} p_0 A, \quad (5.43)$$

ainsi que

$$\dot{m} = \gamma M \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \frac{p_0}{a_0} A, \quad (5.44)$$

qui est aussi utilisée sous forme adimensionnelle

$$\frac{a_0 \dot{m}}{p_0 A} = \gamma M \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}. \quad (5.45)$$

Si nous choisissons comme référence les conditions soniques au col, nous avons $M = 1$ et $A = A_*$ ce qui implique

$$\frac{a_0 \dot{m}}{p_0 A_*} = \gamma \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}\right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = \gamma \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}, \quad (5.46)$$

ou encore

$$\frac{\dot{m}}{\rho_0 a_0 A_*} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}\right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (\gamma=1.4) \cong 0.58. \quad (5.47)$$

5.3 Écoulement dans une tuyère

5.3.1 Tuyère convergente et blocage sonique

L'écoulement dans une tuyère convergente est engendrée par une pression totale p_0 régnant en amont de la tuyère. La configuration de l'écoulement va dépendre de la pression ambiante p_α à la sortie de la tuyère, que l'on nomme également pression arrière ou pression en aval (*back pressure* en langue anglaise), d'où l'indice α . Cette pression peut varier de la valeur $p_\alpha = p_0$ (sans écoulement) jusqu'au vide ($p_\alpha = 0$). La Figure 5.7 illustre les différents cas en représentant le rapport de la pression p dans la tuyère et la pression totale p_0 en fonction de la coordonnée axiale de la tuyère et des différentes valeurs de la pression arrière (a, b, c, d).

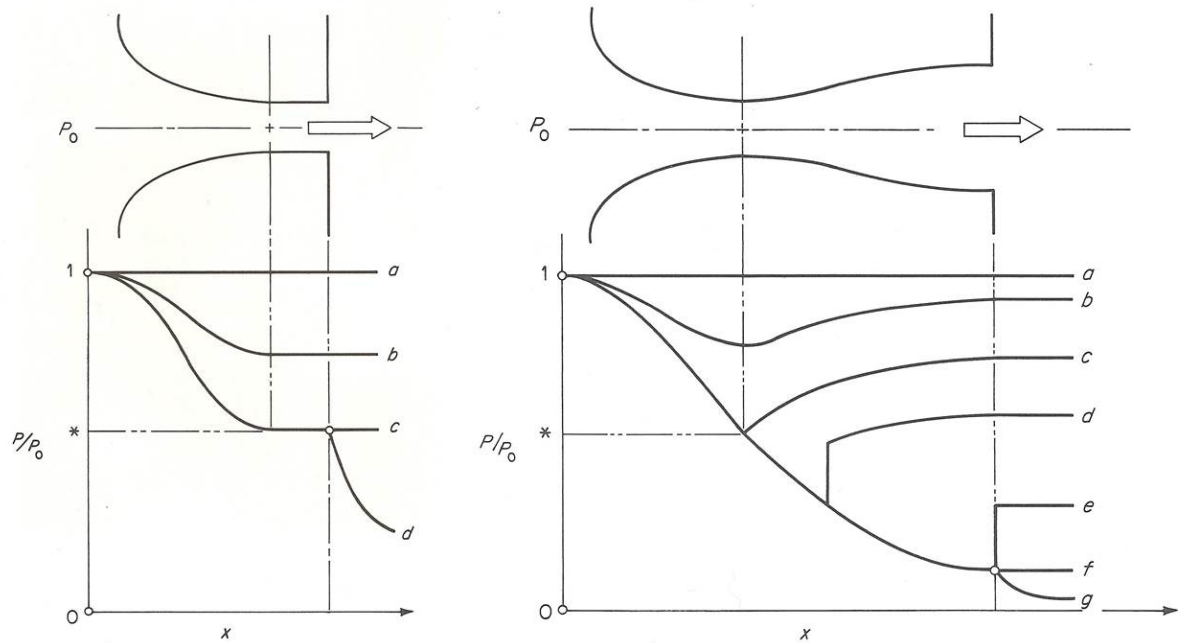


FIGURE 5.7 – Distribution de pression dans une tuyère convergente et une tuyère convergente-divergente.

Quand la pression arrière a une valeur située comme dans le cas b , entre le cas a et c , c'est à dire entre p_* et p_0 , un écoulement subsonique se produit dans la tuyère. Par exemple, pour $p_\alpha/p_0 = 0.65$, les tables isentropiques pour $\gamma = 1.4$ fournissent un nombre de Mach $M = 0.81$ en sortie de tuyère.

Quand la pression arrière est égale à p_* (cas c), l'écoulement est sonique en sortie de tuyère ($M = 1$ etc.). Dans le chapitre précédent, nous avons vu que pour $\gamma = 1.4$, $p_*/p_0 = 0.5283$ (cette valeur se retrouve dans les tables isentropiques pour $M = 1$).

Si la pression arrière est réduite au dessous de cette valeur p_* (cas d), l'écoulement dans la tuyère restera inchangé, étant donné que le nombre de Mach maximal dans une tuyère convergente est égal à 1 et celui-ci se produit où la section est minimale, donc au col (sortie de tuyère). La détente se produira alors à l'extérieur de la tuyère (par des ondes de détentes).

Lorsque l'écoulement devient sonique au col, aucune perturbation ne peut remonter dans le convergent. Par conséquent, l'écoulement dans le convergent ne communique plus avec l'écoulement en aval du col et n'a aucun moyen de savoir que la pression de sortie continue à diminuer. Physiquement, ce phénomène est facile à comprendre du fait qu'aucun message (se propageant à la vitesse du son) ne peut remonter l'écoulement si en un endroit la vitesse est égale à la vitesse du son.

Selon (5.47), le débit-masse ne dépend que des conditions régnant dans le réservoir et non pas de la pression arrière à condition toutefois que l'écoulement soit sonique au col. Ainsi, pour une valeur de p_0 constante, le débit-masse sortant de la tuyère n'augmente pas en baissant la pression arrière (Fig. 5.7). Ce phénomène constitue l'effet de *blocage sonique* (*choked flow*) d'un écoulement compressible.

5.3.2 Tuyère convergente-divergente ou de Laval

L'écoulement dans une tuyère de Laval engendré par une pression totale p_0 régnant en amont de la tuyère se présente comme indiqué sur la Figure 5.7 en fonction de la pression variable p_α régnant en aval de la tuyère.

Si p_α est suffisamment élevée, l'écoulement demeure subsonique tout le long de la tuyère (cas *a* et *b*).

Dans le cas *c*, le col devient sonique au moment où la pression arrière a une valeur particulière (égale à celle du cas *c*). L'écoulement est isentropique tout le long de la tuyère, et en particulier, subsonique. Le fait que l'écoulement soit subsonique dans la partie divergente est confirmé par la tendance de la pression (qui augmente) dans la partie divergente, qui suit celle de la section (qui augmente également).

Les cas *d* et *e* étant mis à l'écart pour l'instant, quand la pression arrière atteint une valeur égale à celle du cas *f*, l'écoulement (isentropique) est alors supersonique dans la partie divergente, tout en restant subsonique dans la partie convergente et sonique au col. Le cas *f* est appelé *point de fonctionnement* (*design operation*) car la globalité de l'écoulement dans la tuyère et en sortie est isentropique et sa vitesse de sortie est maximale (un des objectifs des tuyères, en particulier celles des propulseurs supersoniques).

Entre les cas *c* et *f*, l'écoulement est caractérisé par la présence d'ondes de choc dans la tuyère et à la sortie. Ce phénomène sera examiné dans des chapitres ultérieurs. Pour des pressions arrières inférieures à celles du cas *f* (cas *g* par exemple), des ondes de détente se forment en sortie (ce phénomène sera également étudié dans des chapitres ultérieurs).

Chapitre 6

Introduction aux ondes de choc et de détente

6.1 Introduction

Une onde de choc (*shock wave* en anglais) est une région de l'écoulement où de fortes variations des grandeurs physiques apparaissent sur de très faibles longueurs caractéristiques. L'ordre de grandeur de l'épaisseur d'un choc peut varier selon les conditions de travail : de quelques "libre parcours moyen" des molécules d'un gaz, soit de l'ordre du micron (10^{-6}m), jusqu'à quelques millimètres (et parfois même plus). Dans les cas les plus communs, ces zones sont très minces par rapport à la taille caractéristique de l'écoulement, et nous pouvons les idéaliser comme des surfaces de discontinuité dans l'espace. Par suite, les grandeurs physiques sont elles-mêmes discontinues à travers cette surface, ce qui n'est évidemment pas le cas dans la réalité. On rencontre plusieurs noms attribués à cette surface de discontinuité : *front de choc*, *onde de choc*, ou *choc* tout simplement. Les ondes de chocs furent observées pour la première fois par Mach lui même en 1887. Son fils, Ludwig, quantifia la surpression générée par une onde de choc en utilisant un instrument qui de nos jours prend le nom d'interféromètre de Mach-Zehnder.



FIGURE 6.1 – Image prise par Ernst Mach (hiver 1888) d'une onde de choc devant un projectile supersonique (les traits verticaux sont des fils permettant la synchronisation de la prise d'image). Cinq ans plus tard, l'image de droite fut prise par son fils Ludwig avec un interféromètre de Mach-Zehnder pour quantifier le ressaut en pression.

Un choc est associé à une compression (augmentation de la pression) pour les fluides les plus communs. De ce fait, la terminologie *choc de compression* est généralement redondante. Cependant, il a été montré qu'un *choc de raréfaction* ou *choc de détente* (*rarefaction shock*) est possible dans des cas ésotériques comme pour un fluide autour du point critique ou un plasma. Le critère thermodynamique d'existence de chocs de raréfaction sera présenté dans ce qui suit.

Les chocs peuvent apparaître comme *stationnaires* ou *en mouvement* selon le référentiel choisi. Par exemple, dans le référentiel d'un avion supersonique, le choc apparaîtra comme stationnaire. Dans le référentiel terrestre, le choc sera en mouvement. Un autre exemple de choc en mouvement relatif est celui créé par une explosion (où l'observateur est fixe par rapport à l'explosif) ou dans un tube à choc par rupture d'un diaphragme séparant initialement deux gaz à des pressions différentes.



FIGURE 6.2 – Exemple d'une onde de choc en mouvement (pris du film BBC "Invisible Worlds" 2010 de Richard Hammond) pour un observateur fixe par rapport à l'explosif.

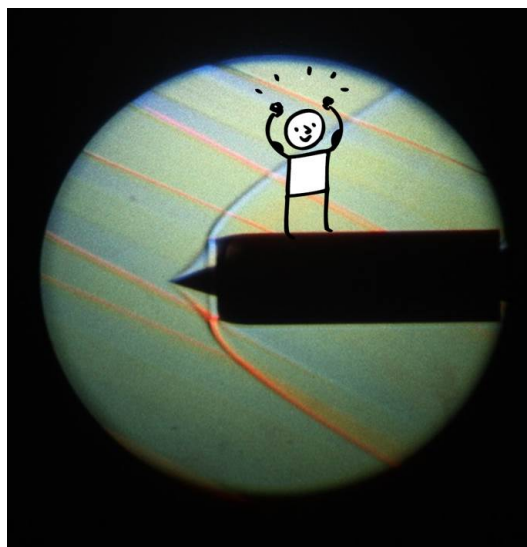


FIGURE 6.3 – Exemple d'une onde de choc fixe par rapport à l'observateur (ondes de chocs autour d'une entrée d'air conique à Mach 2.4, hepia, Genève).

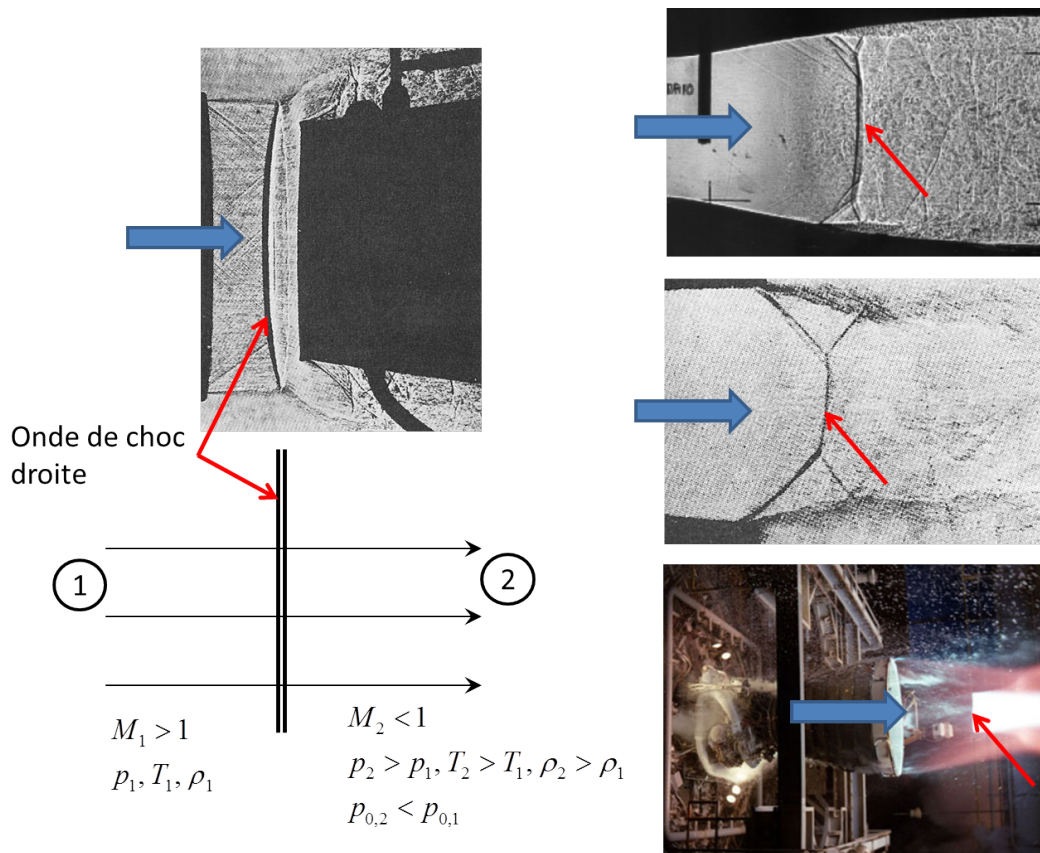


FIGURE 6.4 – Exemples de chocs droits (flèche rouge), donc perpendiculaires à l'écoulement (flèche bleue), dans le sens horaire à partir de la photo en haut et à gauche : jet supersonique débouchant sur une entrée d'air supersonique (*supersonic inlet*) ; onde de choc à l'intérieur d'une tuyère supersonique, provoquant une séparation de la couche limite ; onde de choc droite en sortie d'une tuyère supersonique sur-détendue, visualisée par Schlieren ; sortie de la tuyère sur-détendue du Space Shuttle Main Engine (SSME), avec la présence d'une onde de choc droite en forme de disque, appelé *disque de Mach* (générant en aval une hausse substantielle de la température des gaz).

Plusieurs types de chocs peuvent apparaître mais nous pouvons d'ores et déjà distinguer deux catégories : les chocs droits et les chocs obliques.

6.1.1 Chocs droits

Un *choc droit* (*normal shock wave*) est par définition normal à l'écoulement (Figure 6.4). Un choc droit est caractérisé par le fait que l'écoulement en aval est toujours subsonique (nombre de Mach inférieur à 1). Comme le choc est un phénomène de compression, la pression en aval est supérieure à la pression en amont (il en est de même de la température et de la masse volumique). Par contre, la pression *totale* diminue : c'est cette "perte de charge" qui est responsable de la réduction de rendement dans les entrées d'air supersonique. C'est également cette perte de charge que doit combattre le compresseur dans une soufflerie supersonique à circuit fermé. La chute de pression totale est associée à une augmentation de l'entropie (l'écoulement traversant un choc n'est pas isentropique). Ces chocs droits se retrouvent également à l'intérieur des tuyères (avec des phénomènes de décrochage de couche limite) ou en sortie de tuyère (sous forme de disque de Mach).

6.1.2 Chocs obliques

Les chocs obliques (*oblique shock waves*) sont tels que la vitesse en amont n'est pas orthogonale à la surface du choc. La Figure 6.5 montre la réalisation d'un choc oblique attaché, bi-dimensionnel,

résultant d'un changement brusque de direction de la paroi. Ce dispositif est utilisé dans des rampes de compression d'entrée supersonique de réacteurs.

Cette morphologie se retrouve pour des profils géométriques en forme de dièdre, générant ainsi des chocs obliques de part de d'autre du profil (Figure 6.6). En 3D, les chocs obliques ont une morphologie conique.

Une remarque importante concerne la valeur du nombre de Mach en aval du choc : l'écoulement n'est pas nécessairement subsonique et peut être supersonique. Par contre, les propriétés thermodynamiques (pression, température, et masse volumique) se comportent de manière similaire à une onde de choc droite (toutes augmentes, tandis que la pression totale décroît).

D'une manière générale, même pour des configurations complexes d'ondes de choc, il est possible *localement* d'identifier un choc à un choc droit ou un choc oblique. Par exemple, un choc courbe (*bow shock*) autour d'un corps non profilé symétrique est assimilé localement à une onde de choc droite au voisinage du point d'arrêt, et à une onde de choc oblique aux autres points.

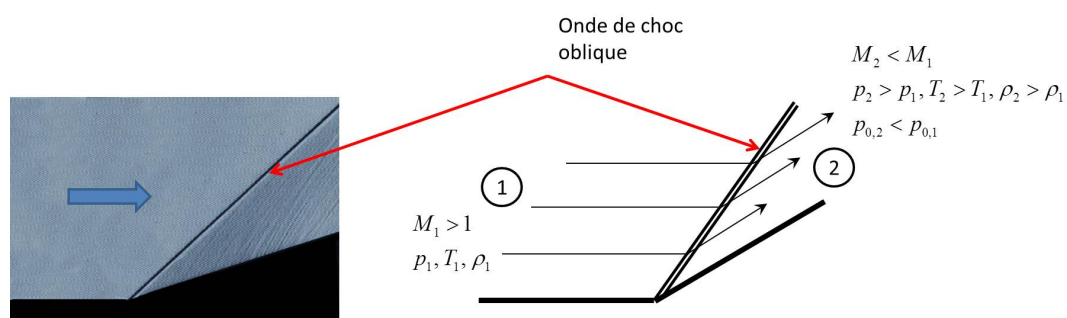


FIGURE 6.5 – Choc oblique sur une rampe de compression.

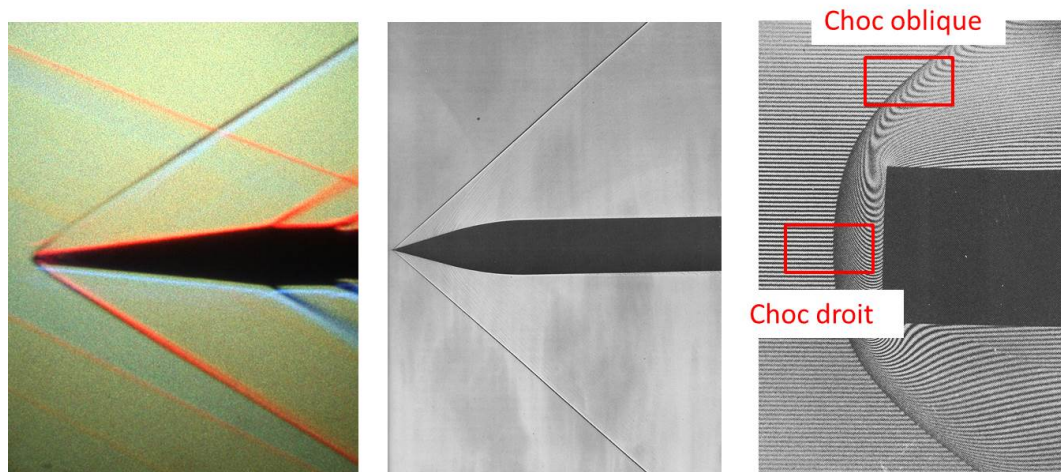


FIGURE 6.6 – Exemples de chocs obliques : ondes bi-dimensionnelles sur un dièdre à Mach 2.4 (hepia, Genève); ondes coniques sur une ogive à Mach 1.7 ("Gallery of Fluid Motion" de Van Dyke); onde de choc courbe (*bow shock*) axisymétrique dans un écoulement de dioxyde de carbone à Mach 2.77 ("Gallery of Fluid Motion" de Van Dyke).

6.1.3 Ondes de compression et ondes de détente

En dehors des chocs, à travers lesquels la pression augmente de manière *discontinue*, les écoulements supersoniques peuvent également présenter des *ondes de détente* (*expansion waves*) ou des *ondes de compression* (à ne pas confondre avec des chocs), où la pression décroît ou croît de manière *continue*.

L'image suivante (Figure 6.7) montre un schéma d'une onde de détente générée lors du changement progressif ou brusque de direction d'une paroi plane : il s'agit ici d'une rampe d'expansion (ou de

détente). Dans le cas de l'arête vive, la détente autour de l'arête se fait par une onde centrée, définie par un faisceau de lignes (ou ondes) de Mach rectilignes, formant ce que l'on appelle un *éventail de Prandtl-Meyer* (*Prandtl-Meyer fan*). L'écoulement est uniforme jusqu'à l'arête, avec un nombre de Mach M_1 et la première onde de Mach doit être rectiligne, inclinée de l'angle μ_1 . La dernière ligne de Mach est inclinée d'un angle μ_2 avec un nombre de Mach M_2 . Entre ces deux lignes limites, on obtient un éventail continu de lignes dont l'angle varie continuellement de μ_1 à μ_2 . Dans le cas d'une courbure progressive de la paroi, l'éventail est maintenant distribué le long de la paroi au lieu d'être centré. Les éventails centrés se retrouvent en particulier sur le bord d'attaque de profils supersoniques à arête vive (Figure 6.7).

Contrairement aux ondes de chocs, le nombre de Mach augmente en traversant des ondes de détente (et reste donc supersonique), tandis que pression, température, et masse volumique diminuent. L'écoulement est isentropique à travers une onde de détente, et ainsi la pression totale reste inchangée.

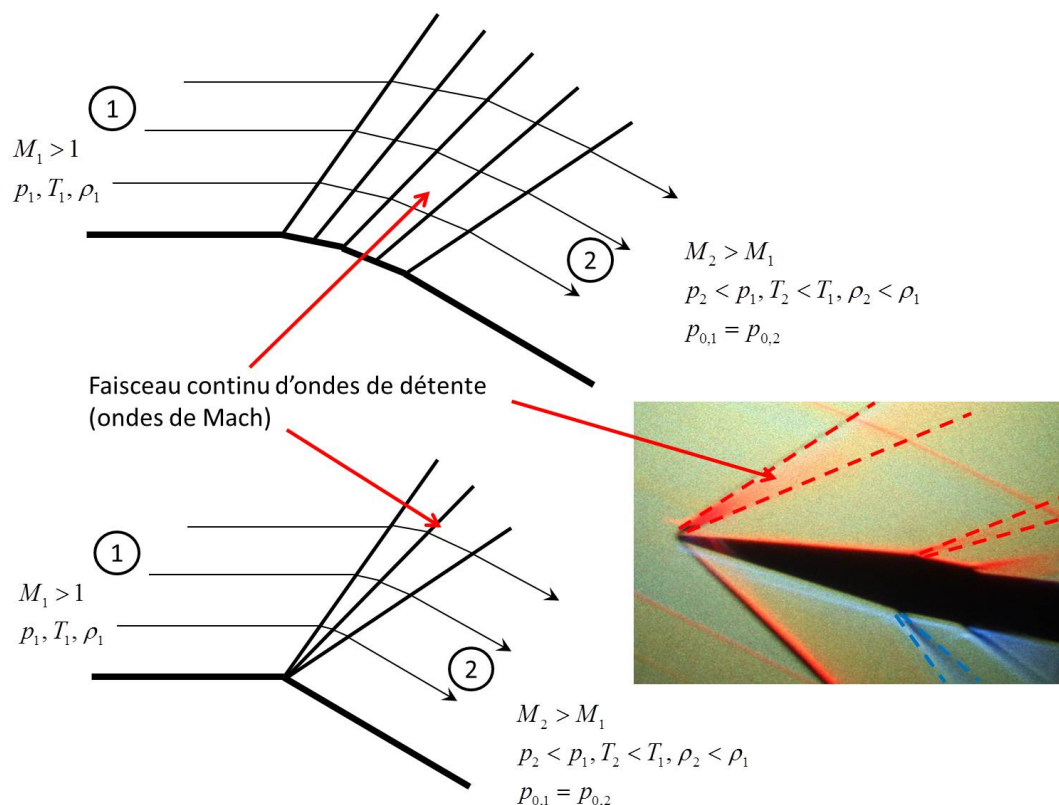


FIGURE 6.7 – Ondes de détente en forme d'éventail (*fan*).

D'une manière analogue, des ondes de compression peuvent se former autour d'un corps dont la géométrie a été adéquatement étudiée. Un exemple en est donné sur la Figure 6.8. Bien que les rampes de compression continue soient préférables d'un point de vue énergétique (la pression totale restant inchangée) par rapport aux compressions discontinues (chocs, pour lesquels la pression totale chute), il est plus simple de concevoir et d'opérer des rampes de compression générant des ondes de chocs obliques. Une solution intermédiaire (présence de chocs obliques mais réduction de la perte de pression totale) est une rampe de compression à plusieurs chocs obliques, mais d'intensité moindre.

6.1.4 Ondes de choc et de détente dans d'autres contextes

Finalement, il existe des systèmes où des ondes de choc peuvent apparaître même en dehors du contexte de la mécanique des fluides compressibles. La Figure 6.9 propose quelques exemples, allant du trafic routier, aux écoulements hydrauliques à surface libre (rivières), pour lesquels on parle alors de *ressaut hydraulique* (*hydraulic jump*). Ces systèmes peuvent être modélisés par des équations qui présentent les mêmes caractéristiques que les équations décrivant le comportement des fluides compressibles.

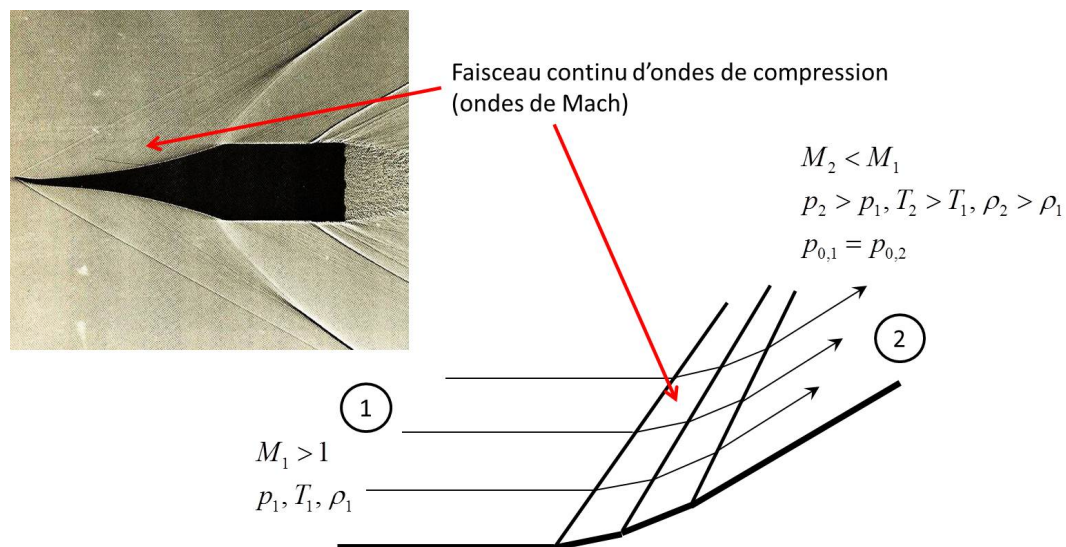


FIGURE 6.8 – Ondes de compression sur une forme géométrique concave permettant une compression progressive, sans ondes de choc, à Mach 2.1 ("Gallery of Fluid Motion" de Van Dyke).



FIGURE 6.9 – Exemples d'ondes de chocs dans des situations où n'intervient pas la compressibilité des fluides. Sens horaire, en partant de la gauche : ressaut hydraulique dans un évier ; onde de choc dans un trafic routier (Sugiyama et al., 2008) ; ressaut hydraulique sur la rivière Severn (Dyke, 1982) ; illustration métaphorique de la propagation d'une onde de choc (Shapiro, 1953).

6.2 Formation d'ondes de choc et de détente

La formation d'ondes de chocs est un phénomène complexe qui se produit dans le temps. Nous allons décrire l'évolution initiale d'une onde de compression et suggérer sa tendance à devenir une onde de choc. La formation même d'une onde de choc n'est pas facilement analysable avec des moyens de base et requiert des outils performants (souvent numériques du fait du caractère non linéaire du phénomène). Par conséquent, nous nous limiterons à des considérations physiques dans une première approche, et dans un deuxième temps, nous présenterons une approche mathématique simplifiée de l'évolution initiale de l'onde de pression. En contrepartie, la formation d'une onde de détente est bien analysée par ces deux approches.

Ces approches nous permettront de (i) comprendre les raisons pour lesquelles seuls les chocs de compression sont possibles (les chocs de détente ou de raréfaction étant impossible pour des fluides habituels), et (ii) déterminer les phénomènes qui provoquent un accroissement de l'entropie à travers une onde de choc (alors que l'onde de pression initiale est isentropique).

6.2.1 Approche pragmatique : piston accéléré dans un fluide au repos

L'approche traditionnelle pour l'étude de l'évolution temporelle des ondes de pression consiste à considérer une onde de compression générée par le mouvement accéléré d'un piston dans une conduite unidimensionnelle. Initialement, le fluide est au repos dans la conduite. Le piston accélère vers la droite, et on modélise l'accélération par une succession de sauts en vitesse se produisant à des intervalles de temps réguliers, avec un piston se déplaçant à vitesse constante entre chaque impulsion. Il s'agit donc d'abord d'analyser comment se comportent les ondes de pression générées à chaque impulsion.

Formule d'Allievi

Le schéma sur la figure ci-dessous (Figure 6.10 illustre un front d'onde de compression généré par une impulsion du piston et se propageant dans un fluide au repos. Derrière l'onde, le fluide est en mouvement avec une vitesse d'intensité infinitésimale du générée par le piston, se déplaçant avec cette même vitesse.

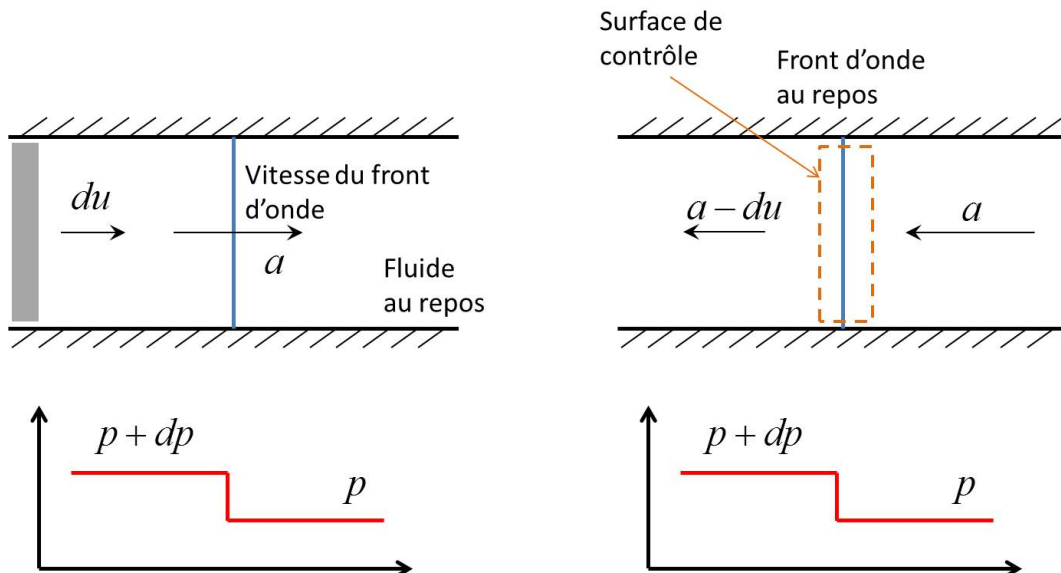


FIGURE 6.10 – Onde de pression générée dans une conduite et représentation dans un référentiel fixe par rapport à l'onde.

L'équation de conservation de quantité de mouvement en version intégrale appliquée à une surface de contrôle englobant l'onde de pression dans un référentiel fixe par rapport à l'onde (Figure 6.10) conduit à la relation suivante

$$A[p - (p + dp)] = \rho Aa[(a - du) - a], \quad (6.1)$$

où A est l'aire de la section de la conduite et ρ la masse volumique du fluide traversé par l'onde. Après simplification, on obtient l'équation d'Allievi (ingénieur Italien, 1856-1941)

$$dp = \rho du. \quad (6.2)$$

Cette équation, aussi connue sous le nom d'*équation du coup de bélier* (*water hammer equation*) représente le saut en pression de part et d'autre d'une onde d'intensité infinitésimale en fonction de sa vitesse de propagation et du saut en vitesse de l'écoulement. Il est à remarquer que dans un référentiel fixe par rapport à l'onde, la vitesse de l'écoulement décroît en traversant l'onde. Cette équation a été largement appliquée dans le domaine hydraulique pour la caractérisation des "coups de bélier" causés par des fermetures brusques de vannes. La validité de cette relation dans le domaine des coups de béliers repose sur les faibles vitesses d'écoulement de liquide dans les conduites par rapport à la vitesse de propagation des ondes de pression (vitesse égale la vitesse du son, comme on le verra ci-après).

Utilisation de l'équation de conservation de masse sous forme intégrale sur la surface de contrôle de la Figure 6.10 mène au résultat suivant

$$\rho a = (\rho + d\rho)(a - du), \quad (6.3)$$

où $\rho + d\rho$ est la masse volumique du fluide du côté comprimé, conduisant à

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{du}{a}. \quad (6.4)$$

Combinant ce résultat avec l'équation d'Allievi donne le résultat attendu

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s, \quad (6.5)$$

où le rapport $dp/d\rho$ a été remplacé par une dérivée partielle à entropie constante du fait des variations infinitésimales de la pression et de la rapidité du processus de compression, deux caractéristiques qui sont indicatrices d'un processus réversible et adiabatique. Ainsi, l'onde de pression infinitésimale se propage à la vitesse du son *du fluide qu'elle traverse*.

Description physique de l'évolution de l'onde

Sur la Figure 6.11, le piston subit deux impulsions successives vers la droite dans une conduite unidimensionnelle contenant initialement un fluide au repos. Une première fois, sa vitesse passe impulsivement de 0 à du et est maintenue à cette vitesse pendant dt , une deuxième fois, sa vitesse passe de du à $2du$. L'évolution des deux ondes est alors suivie dans le temps. Le fluide dans la conduite est alors séparé en trois zones : (i) zone (1) où le fluide est encore au repos ; (ii) zone (2) où le fluide a été traversé par la première onde et se meut avec une vitesse du vers la droite ; (iii) zone (3) entre le piston et la deuxième onde, qui a été traversée par les deux ondes et se meut vers la droite avec la vitesse du piston $2du$.

La première onde se propage avec la vitesse du son a_1 , basée sur la température dans le fluide au repos que l'onde traverse. Dès le passage de cette première onde, le fluide acquiert une vitesse du . De plus, comme il y a eu une légère compression de dp , la température du fluide derrière l'onde (zone 2) subit également une hausse en température de dT (l'écoulement est isentropique).

La deuxième onde va "surfer" un fluide déjà en mouvement avec la vitesse du . De ce fait, la vitesse absolue de l'onde dans le référentiel de la conduite va être égale à $a_2 + du$, où a_2 est la vitesse du son dans la portion de fluide située entre les deux ondes. Or, la température de cette portion de fluide a augmenté de dT , et ainsi la vitesse du son dans cette zone est supérieure à a_1 (dans un référentiel fixe par rapport au fluide).

Il en découle de ce scénario que la deuxième onde (se déplaçant à la vitesse $a_2 + du$, avec $a_2 > a_1$) va rattraper la première onde (se déplaçant à la vitesse a_1). A un certain instant, il y aura coalescence des deux ondes.

Si les impulsions du piston sont répétées plusieurs fois, avec un accroissement de la vitesse de du à chaque impulsion, on obtient un mouvement uniformément accéléré du piston pour des impulsions du et des temps de parcours dt infinitésimaux. Les ondes de pression isentropiques successives rattrapent les ondes devant elles (suite à un accroissement de la vitesse du son ET de leur vitesse de "surf") pour

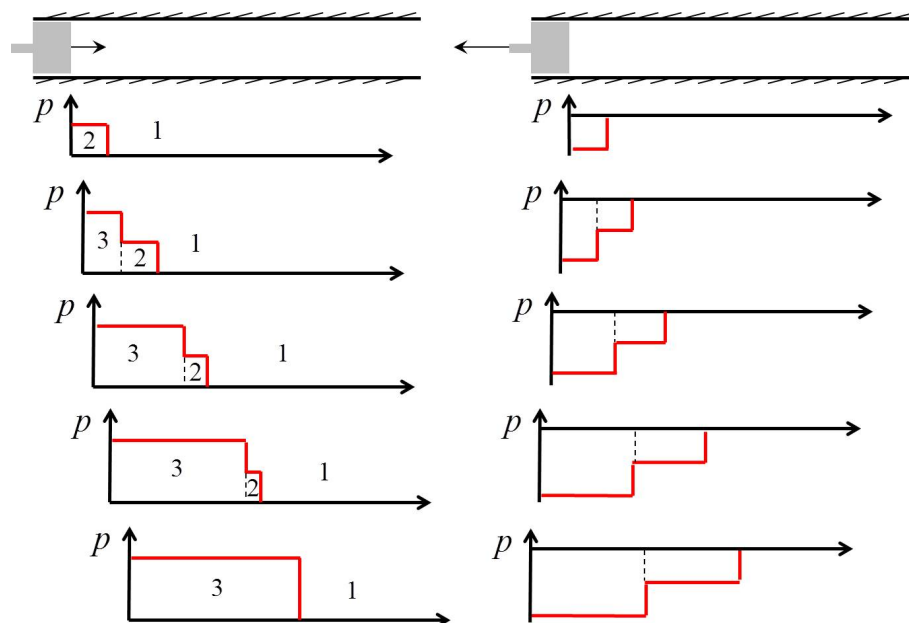


FIGURE 6.11 – Ondes de compression (à gauche) et de détente (à droite) générées par deux impulsions successives d'un piston, vers la droite pour la compression et la gauche pour la détente.

former finalement une seule onde de pression avec une différence de pression non plus infinitésimale. Du fait des grandes différences de pression et de température se produisant de part et d'autre de l'onde sur une petite distance, l'écoulement n'est plus isentropique. Des phénomènes complexes faisant intervenir la viscosité et un transfert de chaleur stabilisent alors cette onde en une *onde de choc*. La vitesse de cette onde de choc n'est pas la vitesse de la première onde ni de la dernière : sa vitesse est déterminée par l'équation de conservation de quantité de mouvement qui fait intervenir la vitesse finale du piston ainsi que le ressaut en propriétés thermodynamiques de part et d'autre du choc.

Il est à remarquer qu'un phénomène similaire se produit avec des vagues de gravité sur la surface d'un liquide. La vitesse de propagation des ondes est proportionnelle à la hauteur des différentes parties de la vague (une partie plus haute étant plus rapide qu'une partie plus basse), et de ce fait les parties hautes de la vague rattrapent les parties basses de la vague, pour donner finalement naissance aux "rouleaux" (*breakers*) des surfeurs. Dans le cas des écoulements compressibles, il ne peut y avoir un rouleau car une même partie de l'onde ne peut avoir deux pressions différentes (Figure 6.12). Une onde de choc se produit en contrepartie.

Si maintenant, le piston se retire vers la gauche, le phénomène inverse se produit. La pression diminue progressivement en proximité du piston, et les ondes successives voient leur vitesse diminuer du fait que la vitesse du son décroît avec la pression et le fluide sur lequel ces ondes surfent se déplacent maintenant dans le sens contraire. Ainsi, les ondes ne rattrapent jamais celles produites en premier : il n'y a pas formation d'ondes de choc et l'écoulement reste isentropique éternellement. On a alors une *onde de détente* (Figure 6.11 et Figure 6.12).

Analyse de l'évolution de l'onde

Les arguments descriptifs de la section précédente peuvent être mis sous forme analytique simple.

On considère une onde de pression continue se déplaçant vers la droite, comme schématisée sur la Figure 6.13. En deux points proches, les propriétés de l'écoulement diffèrent par du , dp , dT , $d\rho$, da , etc. Les parties respectives de l'onde passant par ces points ont une différence de vitesse d'onde d'intensité du_w , où l'indice w dénote l'onde (*wave* en anglais). L'analyse est similaire à celle de la section précédente, où les variations continues des propriétés peuvent être discrétisées en variations infinitésimales. Comme précédemment, on fait l'hypothèse que l'écoulement est isentropique. Ainsi, chaque portion d'onde se propage à une vitesse égale à la vitesse du son *locale* du fluide qu'elle traverse (dans le référentiel du

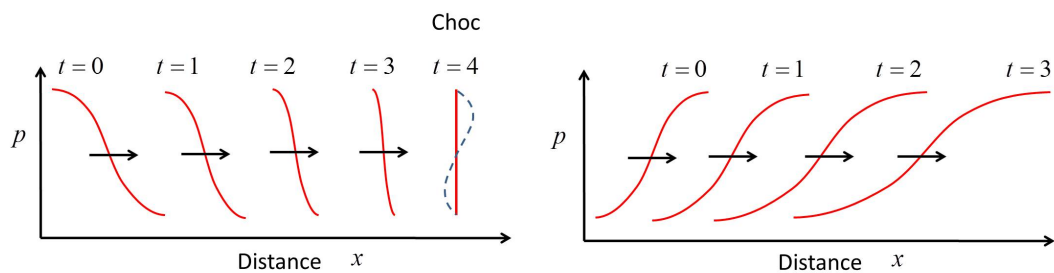


FIGURE 6.12 – Evolution d'une onde de pression : onde de compression, devenant un choc ; onde de détente, restant isentropique.

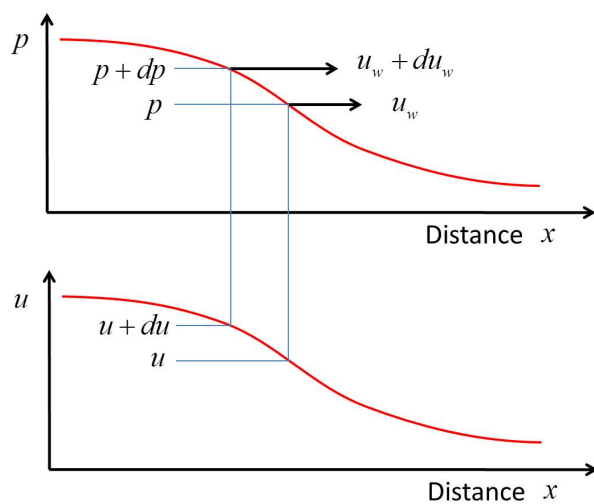


FIGURE 6.13 – Analyse de l'évolution de l'onde.

fluide). Dans un référentiel fixe par rapport à la conduite, la vitesse de l'onde est alors égale à

$$u_w = u + a, \quad (6.6)$$

alors que la vitesse de l'onde adjacente est égale à

$$u_w + du_w = u + du + a + da, \quad (6.7)$$

d'où il découle que

$$du_w = du + da. \quad (6.8)$$

L'objectif est de savoir si des ondes adjacentes se déplacent à des vitesses similaires ou différentes. On forme alors le rapport

$$\frac{du_w}{dp} = \frac{du}{dp} + \frac{da}{dp}. \quad (6.9)$$

Or, la formule d'Allievi nous dit que

$$\frac{du}{dp} = \frac{1}{\rho a}. \quad (6.10)$$

La variation de la vitesse du son a avec la pression p à entropie constante (qui est notre cas) a été obtenu dans le Chapitre 4, Equation 4.19, que nous rappelons ici (avec $v = 1/\rho$)

$$\left(\frac{\partial a^2}{\partial p}\right)_s = 2a \left(\frac{\partial a}{\partial p}\right)_s = 2v \left[\frac{a^4}{2v^3} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\right)_s - 1\right], \quad (6.11)$$

où, comme dans le Chapitre 4, on peut introduire la *dérivée fondamentale de la dynamique des gaz* (*fundamental gasdynamic derivative*), dénotée par le symbole Γ ,

$$\Gamma = \frac{a^4}{2v^3} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\right)_s, \quad (6.12)$$

ce qui donne

$$\left(\frac{\partial a}{\partial p}\right)_s = \frac{v}{a} (\Gamma - 1). \quad (6.13)$$

La variation de la vitesse d'onde avec une variation de pression s'obtient alors facilement en insérant l'équation 6.13 et l'équation 6.10 dans la formule 6.9

$$\frac{du_w}{dp} = \Gamma \frac{v}{a} = \frac{\Gamma}{\rho a}. \quad (6.14)$$

Ainsi, il en ressort que la vitesse de l'onde variera avec la variation de pression selon le signe de Γ . Or, le Chapitre 4 a fait ressortir que $\Gamma > 1$ pour les fluides connus (en particulier, $\Gamma = (\gamma + 1)/2$ pour les gaz parfaits, avec $\gamma > 1$ typiquement).

Ainsi, pour des fluides normaux ($\Gamma > 0$), la vitesse d'onde augmente (diminue) toujours quand la pression augmente (diminue). Ainsi, un piston en accélération, créant une augmentation progressive de la pression, génèrera des ondes de pression toujours plus rapides qui rattraperont celles qui les précèdent pour donner naissance à une onde de choc.

Il est à remarquer que si pour un fluide on avait $\Gamma < 0$, l'effet contraire se produirait. Une accélération du piston créerait des ondes de plus en plus lentes avec l'augmentation de pression ($du_w/dp < 0$), et il ne pourrait pas y avoir de coalescence d'ondes et donc d'onde de choc. Par contre, si le piston se retire, créant une diminution progressive de la pression, les ondes de détente successives verraient leur vitesse diminuer, et les ondes produites en premier rattraperaient les ondes produites en dernier, créant alors un choc de détente ou de raréfaction. Ce phénomène ne peut se produire que dans des cas ésotériques, comme dans certains cas pour un fluide sous forme de plasma ou ptoche du point critique.

Dans le cas intermédiaire $\Gamma = 0$, des ondes de chocs ne peuvent jamais se former car toutes les ondes ont la même vitesse. Ceci ne peut se produire dans un gaz parfait, car cela donnerait un rapport de chaleurs spécifiques γ égal à -1 !

Une petite remarque concerne le signe de Γ qui, selon son expression (Equation 6.12), dépend de la courbure (proportionnelle à d^2v/dp^2) d'une isentrope dans le diagramme $P - v$ d'un fluide. Pour les fluides normaux, la courbure de ces isentropes est toujours positive (isentropes concaves), mais proche du point critique, les isentropes révèlent parfois un point d'inflexion avec un changement de courbure (Figure 6.14).

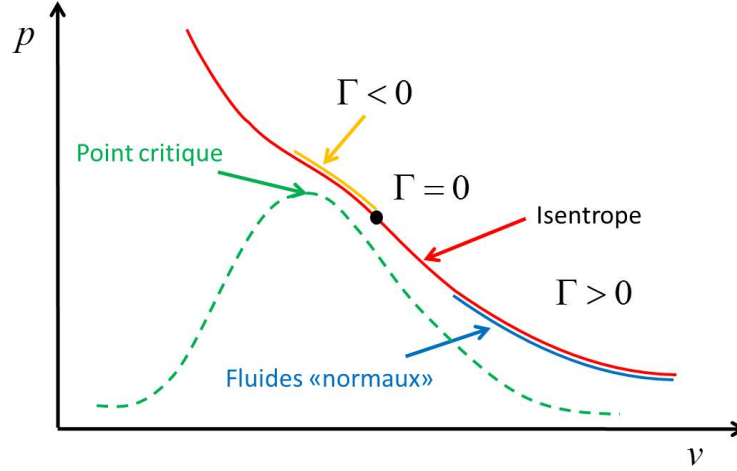


FIGURE 6.14 – Comportement de la dérivée fondamentale, Γ , proche du point critique.

Stabilisation de l'onde de choc et génération d'entropie

La description précise des phénomènes à l'intérieur d'une onde de choc sont très complexes : l'objectif ici est de comprendre les facteurs physiques déterminants au sein d'une telle onde. Alors que de part et d'autre du choc l'écoulement est isentropique (sans frottement et adiabatique), il n'en est pas de même à l'intérieur du choc : les variations brusques de vitesse engendrent des effets visqueux et thermiques qui ne peuvent pas être négligés. Il y a ainsi génération d'entropie lors de la traversée d'une onde de choc, qui sera évaluée dans le chapitre suivant.

Comme l'écoulement n'est pas isentropique, l'équation de conservation de quantité de mouvement (qui fait intervenir les contraintes visqueuses) et l'équation de conservation d'énergie (qui fait intervenir les échanges thermiques ainsi que les dissipations visqueuses) sont distinctes. Un équilibre s'établit entre les forces inertielles qui tendent à raidir le profil et les forces visqueuses qui ont la tendance contraire d'adoucir les variations brusques. Au chapitre suivant, une estimation de l'épaisseur de l'onde de choc sera donnée en imposant cet équilibre.

6.2.2 Approche théorique

Afin d'appréhender la manière dont se forment les ondes de choc et de détente, supposons que nous soyons capables d'engendrer, dans un domaine monodimensionnel, une perturbation de vitesse $u(x)$ au temps initial $t = t_1$ telle que celle représentée par la Figure 6.15. Étudions la propagation de cette perturbation en supposant que l'évolution thermodynamique du gaz soit isentrope.

Pour étudier la propagation, nous devons écrire les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement qui, compte tenu des hypothèses, deviennent

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Comme l'écoulement est isentrope, les variables p et u peuvent être considérées comme des fonctions de ρ uniquement. Ainsi, les relations (6.15) s'écrivent sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{du} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{d\rho}{du} \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} \frac{d\rho}{du} \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (6.16)$$

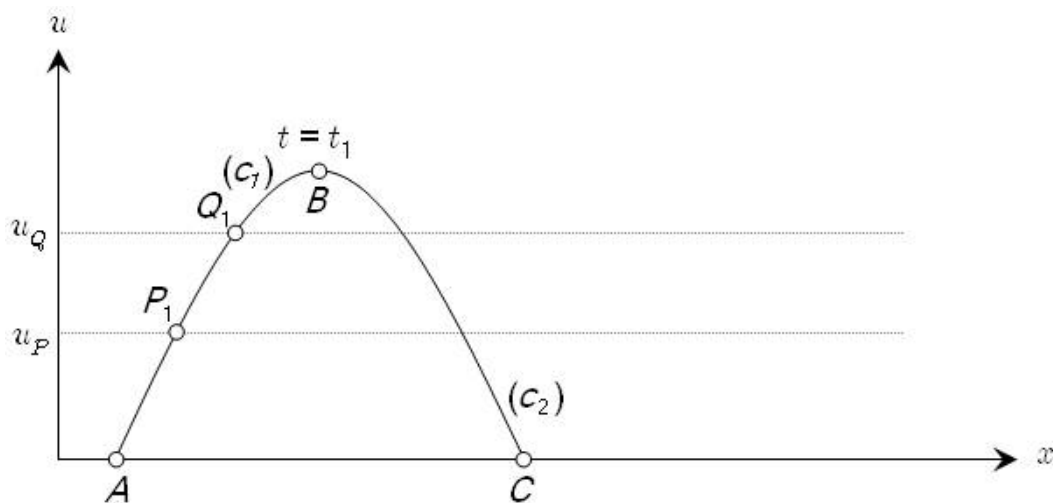


FIGURE 6.15 – Profil de vitesse d'une onde en un instant particulier.

soit

$$\begin{pmatrix} \frac{d\rho}{du} & u \frac{d\rho}{du} + \rho \\ 1 & u + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} \frac{d\rho}{du} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.17)$$

ce qui constitue un système de deux équations homogènes. Le déterminant doit être nul pour qu'elles soient compatibles. Nous obtenons ainsi

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} \left(\frac{d\rho}{du} \right)^2 - \rho = 0 \iff \frac{du}{d\rho} = \pm \frac{1}{\rho} \left(\frac{dp}{d\rho} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (6.18)$$

dont nous déduisons la relation entre u et ρ

$$u = \pm \int \left(\frac{dp}{d\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{d\rho}{\rho}. \quad (6.19)$$

En se servant du fait que la propagation de la perturbation est supposée isentrope, nous avons en vertu de la définition de la vitesse du son (2.67)

$$\left(\frac{dp}{d\rho} \right) = \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_s = a^2 = \frac{\gamma p}{\rho} = k\gamma\rho^{\gamma-1}, \quad (6.20)$$

où la dernière égalité est obtenue en utilisant la relation isentrope (2.115). Nous pouvons maintenant évaluer la valeur de u par la relation (6.19) en utilisant (6.20)

$$u = \int_{\rho_0}^{\rho} (k\gamma\rho^{\gamma-1})^{\frac{1}{2}} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{2}{\gamma-1} (k\gamma)^{\frac{1}{2}} \left[\rho^{\frac{\gamma-1}{2}} \right]_{\rho_0}^{\rho}, \quad (6.21)$$

soit finalement

$$u = \frac{2}{\gamma-1} \left[(k\gamma\rho^{\gamma-1})^{\frac{1}{2}} - (k\gamma\rho_0^{\gamma-1})^{\frac{1}{2}} \right] = \frac{2}{\gamma-1} [a - a_0]. \quad (6.22)$$

Si nous introduisons maintenant l'expression (6.18) dans la seconde relation (6.16), nous avons en choisissant le signe positif

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(u + \left(\frac{dp}{d\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (6.23)$$

puis, en se servant à nouveau de (6.20), l'équation (6.23) devient

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u + a) \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (6.24)$$

Il est possible de trouver une interprétation à cette relation en cherchant la condition pour que u , et par suite ρ , restent constants au cours du temps, lors du déplacement de la perturbation. Ecrivons la variation $du = 0$, sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (6.25)$$

dont la comparaison avec (6.23) permet d'écrire

$$\frac{dx}{dt} = u + a. \quad (6.26)$$

Cela signifie qu'une perturbation pour laquelle u à la valeur donnée par (6.19) se propage de telle façon que u et ρ restent constants en des points qui se déplacent à la vitesse $u + a$. En se servant de (6.22), (6.26) devient

$$\frac{dx}{dt} = u + a = a_0 + \frac{\gamma + 1}{2}u, \quad (6.27)$$

qui permet d'étudier l'évolution de la perturbation (Fig. 6.15). Prenons un point P_1 sur la perturbation au temps $t = t_1$ et soit u_P la vitesse du fluide en ce point. Considérons aussi le point Q_1 sur la perturbation au temps $t = t_1$ et soit u_Q la vitesse du fluide en ce point. D'après (6.27), les vitesses de déplacement de P_1 et Q_1 valent respectivement

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt} \right)_{P_1} &= a_0 + \frac{\gamma + 1}{2}u_P, \\ \left(\frac{dx}{dt} \right)_{Q_1} &= a_0 + \frac{\gamma + 1}{2}u_Q. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Au temps $t = t_2$, P_1 est en P_2 et Q_1 est en Q_2 . La distance entre deux points successifs est ainsi exprimée par

$$\begin{aligned} \overline{P_1 P_2} &= \left(a_0 + \frac{\gamma + 1}{2}u_P \right) (t_2 - t_1), \\ \overline{Q_1 Q_2} &= \left(a_0 + \frac{\gamma + 1}{2}u_Q \right) (t_2 - t_1), \end{aligned} \quad (6.29)$$

soit, de manière plus générale

$$\begin{aligned} \overline{P_n P_{n-1}} &= \left(a_0 + \frac{\gamma + 1}{2}u_P \right) (t_n - t_{n-1}), \\ \overline{Q_n Q_{n-1}} &= \left(a_0 + \frac{\gamma + 1}{2}u_Q \right) (t_n - t_{n-1}). \end{aligned} \quad (6.30)$$

Par conséquent, si la vitesse u_Q est supérieure à u_P , le segment $\overline{Q_1 Q_2}$ est plus grand que le segment $\overline{P_1 P_2}$. La courbe (c) se déforme selon la Figure 6.16. La portion (c_1) de (c) comprise entre A et B , dont la pente est positive, s'allonge tandis que la portion (c_2) , dont la pente est négative se raidit.

Un observateur placé en $x = x_1$ quelconque, voit u augmenter lorsque (c_2) le dépasse et u diminuer lorsque (c_1) le dépasse. Or, si u croît, a croît également et par suite ρ et p croissent. En d'autres termes, (c_2) est une onde de compression et (c_1) une onde de détente. A des instants ultérieurs, la courbe (c) prend la forme (c') . Pour cette position, il existerait pour une même valeur de x plusieurs valeurs de u , ce qui est physiquement impossible. A partir du moment où la branche (c_2) est devenue verticale, l'évolution n'est plus isentrope et le raisonnement précédent n'est plus valable puisque les équations utilisées ne le sont que pour des écoulements isentropes. En fait, la déformation de l'onde ne se poursuit plus au delà du moment où la branche correspond à une discontinuité de la vitesse u , de la pression p et de la masse volumique ρ se produisant dans une couche très mince. La branche (c_2) s'est transformée en une onde de choc d'intensité finie. Ainsi, une onde de compression se transforme au bout d'un certain temps en une onde de choc, tandis que l'onde de détente ne devient jamais une discontinuité.

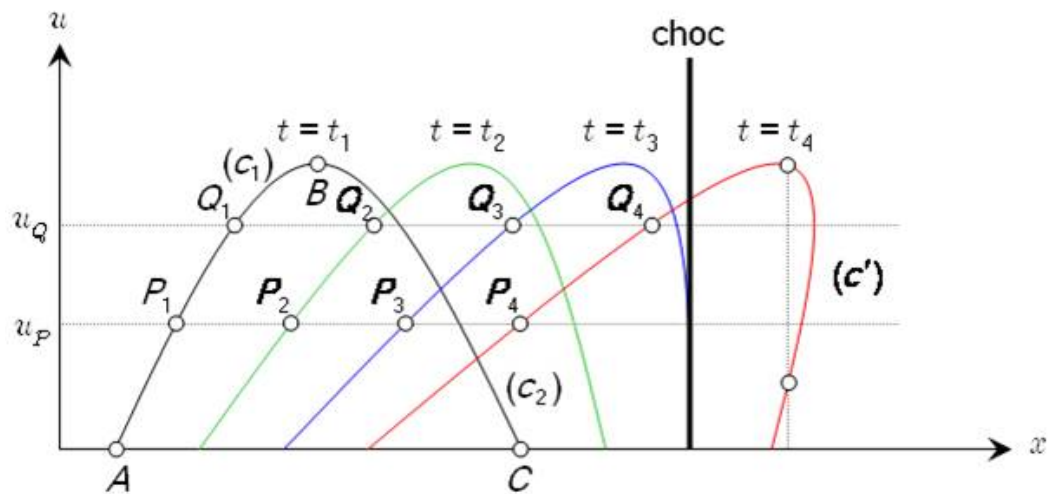


FIGURE 6.16 – Evolution de la perturbation

Remarque Est-il possible que l'onde se propage sans déformation ? Pour qu'il en soit ainsi, il faudrait que $\frac{dx}{dt}$ soit constant quelque-soit le point P sur la courbe (c) . Ceci impliquerait que

$$a_0 + \frac{\gamma + 1}{2} u = \text{const} \quad (6.31)$$

Or, ceci n'est possible que si $\gamma = -1$, ce qui n'est vérifié par aucun fluide réel.

Chapitre 7

Ondes de choc droites

Alors que le chapitre précédent a cherché à justifier l'existence d'une tendance vers la formation d'ondes de choc, le chapitre présent part de l'hypothèse que le choc a été formé, en mettant de côté la physique complexe du processus de formation et de stabilisation du choc. En particulier, la structure *interne* du choc n'interviendra pas dans ce Chapitre. L'étude se base sur des observations expérimentales selon lesquelles les chocs existent bel et bien, et qu'ils couvrent une région dans l'espace en forme de lamelle de petite épaisseur (variant du micron au millimètre), traversée par de la matière (un fluide), à l'intérieur de laquelle se produisent des variations brusques des propriétés cinématiques, mécaniques, et thermodynamiques. Comme il a été observé expérimentalement que cette région est très fine, la théorie qui suit idéalise le choc comme une *surface de discontinuité* dans l'espace. Cette idéalisation ne nuit en rien à la théorie et permet d'obtenir des résultats largement vérifiés par l'expérience pour les propriétés des régions de part et d'autre du choc.

7.1 Equations de conservation pour les ondes de choc

L'écoulement à travers un choc doit satisfaire les principes de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. L'application de ces conditions sous forme intégrale conduira à un ensemble d'équations qui sont les équations du choc ou conditions de choc.

7.1.1 Choix du référentiel

Par définition, une onde de choc droite est une onde normale à l'écoulement. En particulier, l'écoulement est normal de part et d'autre du choc. Comme observé dans le chapitre précédent, une onde de choc peut être stationnaire ou en mouvement par rapport à l'observateur. L'étude d'une onde de choc peut être faite dans un référentiel arbitraire, mais l'analyse s'en trouve grandement simplifiée quand *le référentiel est choisi comme étant fixe par rapport au choc*. Le choc a alors une vitesse nulle, et est alors traversé par un écoulement normal à l'onde, venant d'amont et se déversant vers l'aval.

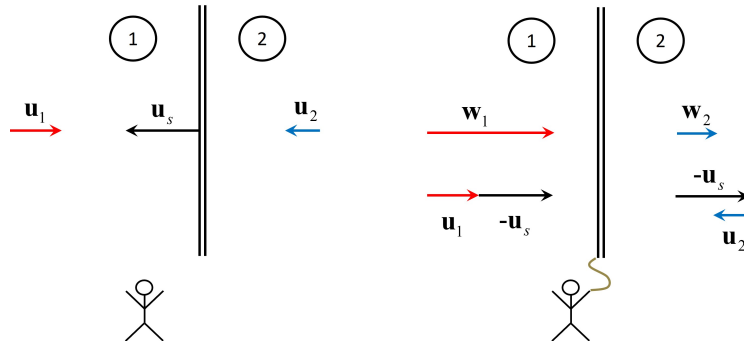


FIGURE 7.1 – Référentiel choisi comme fixe par rapport à l'observateur.

Dans un référentiel fixe par rapport au choc, les vitesses d'écoulement seront dénotées par le symbole \mathbf{w} . Dans un référentiel particulier, la vitesse du choc est égale à \mathbf{u}_s (que l'on prend normale au choc pour l'instant) et les vitesses des écoulements sont égales à \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 , choisies également normales au choc (Figure 7.1). Pour l'instant ces vecteurs vitesses sont d'orientation et de module arbitraire. Dans un référentiel fixe par rapport au choc, les vecteurs vitesse des écoulements peuvent alors s'exprimer comme

suit

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_s, \quad (7.1)$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_s. \quad (7.2)$$

Ce schéma est très général. Il s'applique aux différents cas particuliers présentés dans le chapitre précédent.

* Pour une explosion où l'observateur est fixe, le choc se déplace dans un milieu au repos ($\mathbf{u}_1 = 0$).

* Pour une vanne se fermant brusquement dans une conduite hydraulique, la vitesse entre le choc et la vanne est nulle ($\mathbf{u}_2 = 0$) tandis que la vitesse en amont \mathbf{u}_1 est celle du fluide dans la conduite avant la fermeture de la vanne.

* Pour un ressaut hydraulique remontant une rivière, le schéma est tel qu'il est présenté sur la Figure 7.1, avec \mathbf{u}_1 étant la vitesse de la rivière par rapport à la berge et \mathbf{u}_s la vitesse du ressaut par rapport à la berge également.

* Pour des skieurs en collisions, le schéma est identique à celui de la fermeture de vanne dans une conduite.

7.1.2 Volume de contrôle

On choisit un volume de contrôle englobant le choc, comme illustré sur la Figure 7.2 ci-dessous.

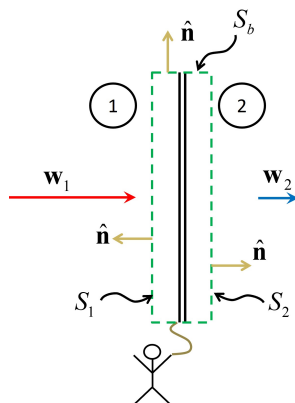


FIGURE 7.2 – Volume de contrôle

Le volume de contrôle est choisi comme coïncidant instantanément avec le choc. L'écoulement ne doit pas être nécessairement permanent pour ce qui suit. En particulier, le choc pourrait accélérer.

Comme les variations des propriétés de l'écoulement se font essentiellement à l'intérieur du choc, les deux faces du volume de contrôle parallèles au choc peuvent être choisies arbitrairement proche du choc afin que les intégrations sur ces faces (extérieures au choc) ne fassent intervenir que des quantités en amont et en aval du choc.

Si ces deux faces parallèles au choc (S_1 et S_2) sont infiniment proches (à une distance un peu plus grande que l'épaisseur du choc), le volume de contrôle devient très petit. Ce choix nous permet de négliger les termes faisant intervenir des intégrations sur le volume

De plus, les intégrations sur les faces perpendiculaires au choc (les bords du volume de contrôle, S_b) sont également négligeables. Comme ces faces intersectent le choc, de forts gradients (inconnus, de surcroît) existent le long de cette face, mais l'aire de cette face étant largement négligeable par rapport à l'aire des faces parallèles au choc, les intégrations le long des bords peuvent être négligées.

D'une manière rigoureuse, si L est une dimension caractéristique de la face parallèle au choc, alors une dimension caractéristique de la face sur les bords sera ϵL , où ϵ est infiniment petit. Ainsi, le rapport des aires sera ϵ quelle que soit la valeur de L . En particulier, il faudra parfois choisir L assez petit afin qu'il n'y ait pas de variations locales (dues à la courbure du choc par exemple).

7.1.3 Conservation de la masse

On utilise l'équation de conservation de la masse sous la forme (Equation 3.1)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_S \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0. \quad (7.3)$$

En se plaçant dans un référentiel coïncidant avec le choc, le vecteur vitesse devient $\mathbf{u} = \mathbf{w}$. Le premier terme contenant la dérivée temporelle peut être négligé selon les critères énoncés précédemment. De même, toute intégration sur les "bords" est également négligeable. Ainsi, on se retrouve avec la relation

$$\int_{S_1, S_2} \rho \mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0, \quad (7.4)$$

laquelle devient

$$-\int_{S_1} \rho w_n dS + \int_{S_2} \rho w_n dS = 0, \quad (7.5)$$

où w_n est la composante de \mathbf{w} perpendiculaire au choc, $w_n = \mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{n}}$. Il est à remarquer comment le vecteur unitaire $\hat{\mathbf{n}}$ change de sens en traversant le choc, ce qui conduit à un changement de signe pour le produit scalaire $\mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ de part et d'autre du choc (\mathbf{w} ne change pas de sens). Comme les faces sont prises assez petites pour que les propriétés soient uniformes de part et d'autre du choc le long de ces faces, et que les deux surfaces S_1 et S_2 ont la même aire (du fait qu'elles soient très proches l'une de l'autre), on a alors

$$\rho_1 w_{n,1} = \rho_2 w_{n,2}. \quad (7.6)$$

Cette relation représente la conservation de masse à travers le choc. On peut la réécrire en exprimant la différence ou *saut* d'un paramètre quelconque à travers un choc. Ce saut est représenté avec une notation conventionnelle faisant intervenir des crochets. Ainsi, le saut du débit massique, par unité surface de choc, peut être écrit $[\rho w_n]$

$$[\rho w_n] = \rho_2 w_{n,2} - \rho_1 w_{n,1}, \quad (7.7)$$

qui, dans le cas présent, est nul

$$[\rho w_n] = 0. \quad (7.8)$$

7.1.4 Conservation de la quantité de mouvement

D'une manière similaire, on utilise l'équation de conservation de quantité de mouvement sous forme intégrale (Equation 3.4)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \mathbf{u} dV + \int_S \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dS = - \int_S p \hat{\mathbf{n}} dS + \int_S \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \int_V \rho \mathbf{f} dV, \quad (7.9)$$

où \mathbf{T} représente le tenseur des contraintes visqueuses et \mathbf{f} le vecteur des forces volumiques. L'intégration sur le volume de la quantité de mouvement (celle faisant intervenir une dérivée par rapport au temps) peut être négligée du fait d'un volume choisi comme infiniment petit (il ne peut pas y avoir de stockage de quantité de mouvement). Par le même argument, l'intégrale volumique des forces de volume (gravité) est négligeable pour un volume infiniment petit. Comme les faces S_1 et S_2 sont choisis hors du choc, les contraintes visqueuses y sont négligeables (par hypothèse l'écoulement est isentropique de part et d'autre du choc). Le choix d'un volume de contrôle très fin permet d'éliminer les termes faisant intervenir des intégrations sur les bords (S_b), ce qui est commode car les contraintes visqueuses y sont conséquentes et non connues. Ainsi

$$\int_{S_1, S_2} \rho \mathbf{w} (\mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dS = - \int_{S_1, S_2} p \hat{\mathbf{n}} dS. \quad (7.10)$$

La composante le long de l'écoulement produit alors

$$-\rho_1 w_{n,1} w_{n,1} + \rho_2 w_{n,2} w_{n,2} = p_1 - p_2, \quad (7.11)$$

ou

$$p_1 + \rho_1 w_{n,1}^2 = p_2 + \rho_2 w_{n,2}^2, \quad (7.12)$$

qui peut s'écrire

$$[p + \rho w_n^2] = 0. \quad (7.13)$$

Une remarque très importante concerne la forme de cette relation : bien qu'elle ait une ressemblance trompeuse avec la relation de Bernoulli pour les écoulements *incompressibles* (elle ne contient pas de facteur $1/2$ devant w_n^2), elle est absolument distincte de cette dernière. Pour commencer, l'écoulement traversant le choc est *compressible*. D'autre part, alors que la relation de Bernoulli est obtenue pour un écoulement isentropique le long d'une ligne de courant, la relation présente a été obtenue par conservation de quantité de mouvement de part et d'autre du choc, et non le long d'une ligne de courant (qui, elle, traverserait le choc où les frottements et les transferts de chaleur feraient échouer la condition d'isentropie). Finalement, le terme ρw_n^2 représente un débit de quantité de mouvement au travers d'une surface, alors que le terme de Bernoulli $1/2 w_n^2$ est une énergie cinétique le long d'une ligne de courant.

7.1.5 Conservation de l'énergie

A partir de l'équation de conservation d'énergie (Equation 3.26)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho e_0 dV + \int_V \nabla \cdot (\rho e_0 \mathbf{u}) dV = \int_V \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}) dV + \int_V \rho (\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}) dV - \int_V \nabla \cdot \mathbf{q} dV + \int_V r dV, \quad (7.14)$$

on réécrit les intégrales de volume sous forme d'intégrales de surface

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho e_0 dV + \int_S (\rho e_0 \mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = - \int_S p \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \int_S (\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \int_V \rho (\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}) dV - \int_S \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \int_V r dV, \quad (7.15)$$

où

$$e_0 = e + \frac{1}{2} u^2. \quad (7.16)$$

Comme précédemment, on néglige l'intégrale volumique de l'énergie (faisant intervenir la dérivée temporelle) comme le volume V est pris comme étant infiniment petit. Il en est de même des intégrales sur les surface du bord S_b (prises comme infiniment petites), qui, il faut le noter, font intervenir du travail de frottement et de la transmission de chaleur (là où la surface S_b traverse le choc). Sur les surfaces S_1 et S_2 , l'écoulement y est considéré comme isentropique, et ainsi les termes visqueux et de transmission de chaleur sont nuls sur ces surfaces. Il reste les termes faisant intervenir les forces volumiques et le rayonnement. L'intégrale volumique du travail des forces volumiques sur un volume infiniment petit peut être pris comme nul. En ce qui concerne le terme de rayonnement, l'expérience montre que les chocs ne rayonnent que très peu, et que, de plus, si ce rayonnement est sommé sur un volume infiniment petit, le résultat est pratiquement nul. Ainsi

$$\int_{S_1, S_2} (\rho e_0 \mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = - \int_{S_1, S_2} p \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS, \quad (7.17)$$

qui peut se réécrire dans le repère du choc (pour des surface S_1 et S_2 égales)

$$\rho_2 \left(e_2 + \frac{w_{n,2}^2}{2} \right) w_{n,2} - \rho_1 \left(e_1 + \frac{w_{n,1}^2}{2} \right) w_{n,1} = -p_2 w_{n,2} + p_1 w_{n,1}. \quad (7.18)$$

En introduisant l'enthalpie $h = e + p/\rho$

$$\rho_1 \left(h_1 + \frac{w_{n,1}^2}{2} \right) w_{n,1} = \rho_2 \left(h_2 + \frac{w_{n,2}^2}{2} \right) w_{n,2}, \quad (7.19)$$

et en invoquant la conservation de masse, on obtient alors

$$h_1 + \frac{w_{n,1}^2}{2} = h_2 + \frac{w_{n,2}^2}{2}, \quad (7.20)$$

ou

$$\left[h + \frac{w_n^2}{2} \right] = 0. \quad (7.21)$$

7.1.6 Entropie

Le deuxième principe de la thermodynamique appliqué au volume de contrôle impose la condition

$$[s] > 0. \quad (7.22)$$

7.2 Propriétés des ondes de choc

Les relations fondamentales des ondes de choc sont donc les suivantes

$$[\rho w_n] = 0, \quad (7.23)$$

$$[p + \rho w_n^2] = 0, \quad (7.24)$$

$$\left[h + \frac{w_n^2}{2} \right] = 0. \quad (7.25)$$

$$[s] > 0. \quad (7.26)$$

Si nous combinons les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, il est possible d'écrire la relation

$$w_{n,1} w_{n,2} = \frac{[p]}{[\rho]}, \quad (7.27)$$

dans laquelle nous faisons apparaître le flux de masse $j = \rho_1 w_{n,1} = \rho_2 w_{n,2}$ après multiplication par $\rho_1 \rho_2$ de manière à obtenir

$$j^2 = -\frac{[p]}{[v]}, \quad (7.28)$$

où $v = 1/\rho$ est le volume massique.

On définit le *nombre de Mach du choc* (*shock Mach number* $M_{n,1}$)

$$M_{n,1} \equiv \frac{w_{n,1}}{a_1}. \quad (7.29)$$

La combinaison de la conservation de la masse et de la quantité de mouvement conduit alors au rapport adimensionnel du saut de pression à travers le choc

$$\Pi = \frac{[p]}{\rho_1 a_1^2} = -M_{n,1} \frac{[w_n]}{a_1} = -M_{n,1}^2 \frac{[v]}{v_1}, \quad (7.30)$$

où la dernière égalité est obtenue à l'aide de (7.28) et de la définition du flux massique j . Nous en déduisons la relation

$$[w_n]^2 = -[p][v]. \quad (7.31)$$

Par définition, la valeur numérique de Π est une mesure de l'intensité du choc. Parfois, la définition $\Pi' = \frac{[p]}{p_1}$ est aussi utilisée. Les deux cas extrêmes en termes d'intensité de choc sont les chocs forts et les chocs faibles.

Choc faible Dans le cas d'un choc faible, nous avons la condition $\Pi \ll 1$ ce qui implique, en vertu de (7.30), les conditions

$$\left. \begin{array}{l} -\frac{[w_n]}{a_1} \\ -\frac{[v]}{v_1} \\ M_{n,1} - 1 \end{array} \right\} \ll 1 \quad (7.32)$$

Choc fort Dans le cas d'un choc fort, nous avons la condition $\Pi \gg 1$ ce qui implique, en vertu de (7.30), les conditions

$$\left. \begin{array}{l} -\frac{[w_n]}{a_1} \\ -\frac{[v]}{v_1} \\ M_{n,1} - 1 \end{array} \right\} \gg 1 \quad (7.33)$$

7.2.1 Equation de Rankine-Hugoniot

Considérons l'équation de conservation de l'énergie à travers un choc (7.25) et écrivons la sous la forme

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2} (w_{n,1} - w_{n,2}) (w_{n,1} + w_{n,2}), \quad (7.34)$$

puis celle de quantité de mouvement (7.24) réécrite comme la différence

$$w_{n,1} - w_{n,2} = \frac{p_2 - p_1}{\rho_1 w_{n,1}}, \quad (7.35)$$

et enfin la conservation de la masse (7.23) exprimée comme la somme

$$w_{n,2} + w_{n,1} = \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \rho_1 w_{n,1}. \quad (7.36)$$

Par substitution de (7.35) et (7.36) dans (7.34), il vient

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2} \frac{p_2 - p_1}{\rho_1 w_{n,1}} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \rho_1 w_{n,1} = \frac{p_2 - p_1}{2} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right), \quad (7.37)$$

qui ne contient plus que des grandeurs *thermodynamiques*. Si p_1 , ρ_1 sont connues et si la fonction $h_2 = h_2(p_2, \rho_2)$ est donnée à partir d'une équation d'état, cette relation se réduit à $p_2 = p_2(\rho_2)$. C'est la relation du choc adiabatique ou *adiabate dynamique d'un gaz*, aussi nommé *équation de Rankine-Hugoniot*.

7.2.2 Variation d'entropie à travers un choc faible

L'équation de Rankine-Hugoniot peut être réécrite sous la forme suivante

$$[h] = v_1 [p] + \frac{1}{2} [v] [p]. \quad (7.38)$$

Un développement de Taylor de $h(s, p)$ et $v(s, p)$ et l'utilisation des identités thermodynamiques suivantes

$$T = \left(\frac{\partial h}{\partial s} \right)_p, \quad (7.39)$$

$$v = \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_s, \quad (7.40)$$

conduit à la relation importante suivante

$$[s] = \frac{1}{12T_1} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2} \right)_s [p]^3 + O([p]^4). \quad (7.41)$$

Sous forme non-dimensionnelle, cette dernière expression s'écrit sous la forme

$$\frac{T_1 [s]}{a_1^2} = \frac{1}{6} \Gamma_1 \Pi^3 + O(\Pi^4), \quad (7.42)$$

où la dérivée fondamentale a déjà été introduite

$$\Gamma = \frac{a^4}{2v^3} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2} \right)_s. \quad (7.43)$$

Ainsi, si $[s] > 0$ selon le second principe de la thermodynamique, alors le signe de Π doit être égal au signe de la dérivée fondamentale pour des chocs faibles. Comme pour la plupart des fluides $\Gamma > 0$, alors seuls des chocs de compression (et non de détente) sont possibles. Ceci reste vrai pour des chocs forts (démonstration dans Landau and Lifshitz, 1997).

7.3 Relations entre variables thermodynamiques de part et d'autre du choc pour un gaz parfait

Considérons l'onde de choc droite de la Figure 7.2. A l'amont du choc (région 1), l'écoulement est uniforme et, à l'aval dans la région 2, l'écoulement est lui aussi uniforme mais les variables d'état sont différentes après la surface de discontinuité. La pression, la vitesse, la masse volumique, l'enthalpie et la température de la région 1 subissent la variation

$$\begin{aligned} p_1 &\rightarrow p_2, \\ w_{n,1} &\rightarrow w_{n,2}, \\ \rho_1 &\rightarrow \rho_2, \\ h_1 &\rightarrow h_2, \\ T_1 &\rightarrow T_2, \end{aligned} \quad (7.44)$$

entre les régions 1 et 2. Dès lors, le problème du choc droit peut s'énoncer de la manière suivante. Etant données les grandeurs $p_1, w_{n,1}, \rho_1, h_1, T_1$ connues à l'amont, déterminer les grandeurs $p_2, w_{n,2}, \rho_2, h_2, T_2$ à l'aval du choc. Pour la résolution de ce problème, nous utilisons les équations de conservation ainsi que les équations constitutives.

Tout d'abord, introduisons les nombres de Mach $M_{n,1}$ et $M_{n,2}$ en amont et en aval du choc

$$M_{n,1} = \frac{w_{n,1}}{a_1} \quad \text{et} \quad M_{n,2} = \frac{w_{n,2}}{a_2}, \quad (7.45)$$

puis rappelons qu'à l'aide de la vitesse du son dans un gaz parfait, nous pouvons écrire

$$w^2 = a^2 M^2 = \gamma r T M^2. \quad (7.46)$$

En utilisant l'équation de conservation de l'énergie pour une onde de choc (7.25), la relation thermodynamique (2.98) ainsi que celle liant c_p à γ et r (2.101), nous avons

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} r T_1 + \frac{1}{2} \gamma r T_1 M_{n,1}^2 = \frac{\gamma}{\gamma-1} r T_2 + \frac{1}{2} \gamma r T_2 M_{n,2}^2, \quad (7.47)$$

dont nous déduisons que

$$T_1 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{n,1}^2 \right) = T_2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{n,2}^2 \right). \quad (7.48)$$

En comparant cette relation à l'équation (4.29) exprimant la température totale T_0 en fonction de la température statique T rappelée ici

$$T_0 = T \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right), \quad (7.49)$$

nous aboutissons au résultat déjà connu

$$T_{0,1} = T_{0,2}, \quad (7.50)$$

traduisant le fait que la température totale ne change pas à travers le choc. Avec (7.48), nous obtenons le rapport des températures de part et d'autre du choc

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{n,1}^2 \right)}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{n,2}^2 \right)}, \quad (7.51)$$

qui permet d'obtenir, avec la vitesse du son et la relation thermodynamique (2.98)

$$\frac{a_2^2}{a_1^2} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{n,1}^2 \right)}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{n,2}^2 \right)}. \quad (7.52)$$

Ensuite, l'utilisation de l'équation de conservation de la quantité de mouvement (7.24) et celle de l'équation d'état permet d'écrire

$$\rho_1 r T_1 + \rho_1 \gamma r T_1 M_{n,1}^2 = \rho_2 r T_2 + \rho_2 \gamma r T_2 M_{n,2}^2, \quad (7.53)$$

où la définition du nombre de Mach (7.45) a aussi été introduite. La relation précédente s'écrit aussi

$$\rho_1 T_1 (1 + \gamma M_{n,1}^2) = \rho_2 T_2 (1 + \gamma M_{n,2}^2). \quad (7.54)$$

Par conséquent, le rapport des masses volumiques s'écrit

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(1 + \gamma M_{n,1}^2) (1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{n,2}^2)}{(1 + \gamma M_{n,2}^2) (1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{n,1}^2)} = \frac{w_{n,1}}{w_{n,2}}, \quad (7.55)$$

où la dernière égalité est obtenue par conservation de la masse (7.23). Puis, en utilisant l'équation d'état, nous déduisons de la relation précédente le rapport des pressions

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{T_2}{T_1} = \frac{(1 + \gamma M_{n,1}^2)}{(1 + \gamma M_{n,2}^2)}. \quad (7.56)$$

Nous avons ainsi résolu le problème du choc droit puisque tous les rapports entre variables d'état ont été exprimées. Cependant, il reste une inconnue : le nombre de Mach $M_{n,2}$ qui peut être éliminé en utilisant la conservation de la masse. Ainsi, en élevant l'équation de conservation de masse (Equation 7.23) au carré et en utilisant l'expression de la vitesse du son ainsi que la définition du nombre de Mach, nous avons

$$\rho_1^2 T_1 M_{n,1}^2 = \rho_2^2 T_2 M_{n,2}^2, \quad (7.57)$$

puis en utilisant les résultats pour $\frac{p_2}{p_1}$ et $\frac{T_2}{T_1}$

$$\frac{M_{n,2}^2 (1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{n,2}^2)}{(1 + \gamma M_{n,2}^2)^2} = \frac{M_{n,1}^2 (1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{n,1}^2)}{(1 + \gamma M_{n,1}^2)^2}. \quad (7.58)$$

L'équation est quadratique en $M_{n,2}^2$ et $M_{n,1}^2$. Les deux solutions s'écrivent

$$M_{n,2}^2 = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{n,1}^2}{\gamma M_{n,1}^2 - \frac{\gamma-1}{2}} \quad \text{et} \quad M_{n,2}^2 = M_{n,1}^2, \quad (7.59)$$

dont seule la première est intéressante. Ainsi, en utilisant (7.59) pour éliminer $M_{n,2}$ dans les relations exprimant les rapports entre variables d'état, nous avons

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2}{\gamma+1} \left(\gamma M_{n,1}^2 - \frac{\gamma-1}{2} \right) = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_{n,1}^2 - 1), \quad (7.60)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{h_2}{h_1} = \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^2 \frac{1}{M_{n,1}^2} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{n,1}^2 \right) \left(\gamma M_{n,1}^2 - \frac{\gamma-1}{2} \right), \quad (7.61)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{w_{n,1}}{w_{n,2}} = \frac{\gamma+1}{2} \frac{M_{n,1}^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{n,1}^2}. \quad (7.62)$$

Nous remarquons que p_2 , $w_{n,2}$, ρ_2 , h_2 , T_2 peuvent s'exprimer uniquement en fonction des grandeurs physiques à l'amont. D'autres rapports obtenus à l'aide des relations (4.29), (4.31) et (4.32), associées aux grandeurs totales, peuvent être utiles

$$\frac{T_{0,2}}{T_{0,1}} = \frac{T_2}{T_1} \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{n,2}^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{n,1}^2} = 1, \quad (7.63)$$

$$\frac{p_{0,2}}{p_{0,1}} = \frac{\rho_{0,2}}{\rho_{0,1}} = \frac{p_2}{p_1} \left\{ \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{n,2}^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{n,1}^2} \right\}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \frac{\left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} M_{n,1}^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}}{\left\{ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{n,1}^2 \right\}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left\{ \gamma M_{n,1}^2 - \frac{\gamma-1}{2} \right\}^{\frac{1}{\gamma-1}}}, \quad (7.64)$$

traduisant une perte de pression totale due au choc. Ainsi, la pression totale p_0 ne reste pas constante quand l'écoulement traverse un choc, contrairement à la température totale T_0 . Les variations des paramètres sont représentés sur la Figure 7.3.

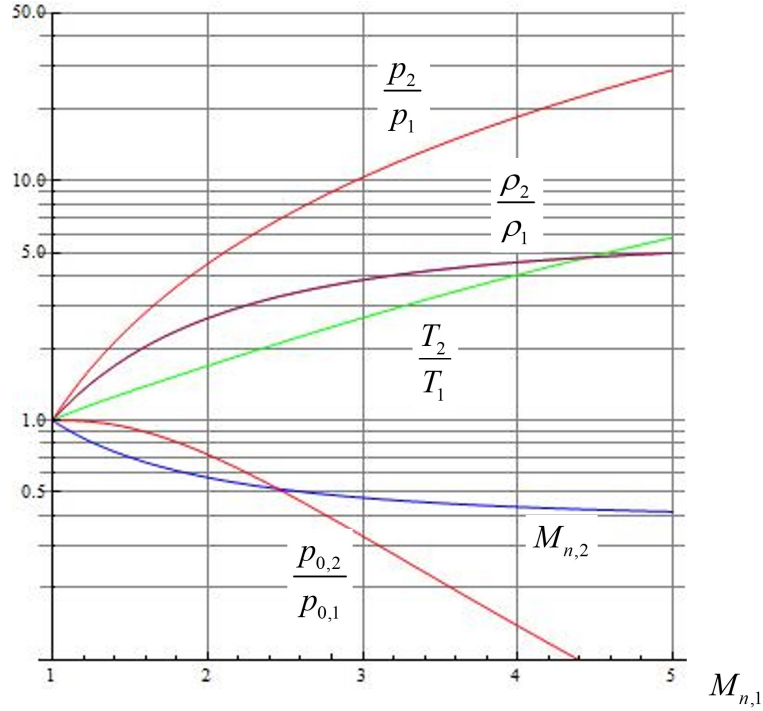


FIGURE 7.3 – Rapport des paramètres de part et d'autre du choc en fonction du nombre de Mach du choc.

7.3.1 Accroissement d'entropie à travers un choc

Pour calculer la variation d'entropie au travers du choc, utilisons la relation (2.105) qui s'écrit sous la forme

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \left[\frac{T_2}{T_1} \right] - r \ln \left[\frac{p_2}{p_1} \right]. \quad (7.65)$$

D'une part, nous pouvons écrire

$$s_2 - s_1 = s_{0,2} - s_{0,1} = c_p \ln \left[\frac{T_{0,2}}{T_{0,1}} \right] - r \ln \left[\frac{p_{0,2}}{p_{0,1}} \right] = -r \ln \left[\frac{p_{0,2}}{p_{0,1}} \right], \quad (7.66)$$

où la dernière égalité est obtenue avec (7.50). Nous en déduisons que

$$\frac{p_{0,2}}{p_{0,1}} = \exp^{-\frac{(s_2 - s_1)}{r}}. \quad (7.67)$$

Nous remarquons immédiatement que si $s_2 - s_1 > 0$, la pression totale p_0 décroît à travers le choc. D'autre part, les expressions (7.65), (7.61) et (7.62) permettent d'obtenir

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \left\{ \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_{n,1}^2 - 1) \right] \left[1 - \frac{2}{\gamma + 1} \frac{M_{n,1}^2 - 1}{M_{n,1}^2} \right]^\gamma \right\}, \quad (7.68)$$

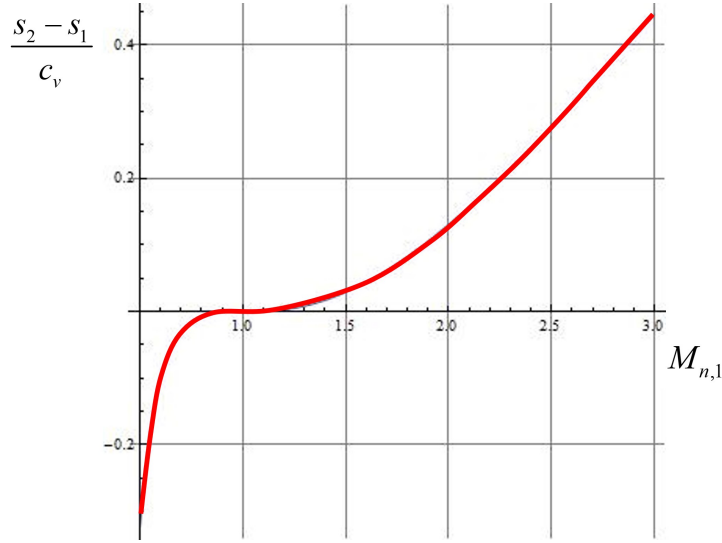
réflétant ainsi le fait que la différence $s_2 - s_1$ à travers le choc ne dépend que de $M_{n,1}$. La variation d'entropie à travers le choc est représentée sur la Figure 7.4.

Or, la seconde loi de la thermodynamique implique

$$s_2 - s_1 \geq 0 \quad (7.69)$$

Avec la relation (7.68), nous voyons que

$$\begin{aligned} M_{n,1} \geq 1 &\rightarrow s_2 - s_1 \geq 0, \\ M_{n,1} < 1 &\rightarrow s_2 - s_1 < 0, \end{aligned} \quad (7.70)$$

FIGURE 7.4 – Variation d'entropie à travers le choc pour un gaz parfait ($\gamma = 1.4$).

où seule la première relation vérifie le second principe. Par conséquent, seuls les cas $M_{n,1} \geq 1$ sont valides traduisant le fait que les chocs ne peuvent apparaître que dans un écoulement supersonique. Nous pouvons encore le montrer par le raisonnement suivant. Il suffit de poser $M_{n,1}^2 = 1 + \varepsilon$, avec $\varepsilon \ll 1$ de sorte que (7.68) devienne

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \left\{ \left(1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} ([1 + \varepsilon] - 1) \right) \left[1 - \frac{2}{\gamma+1} \frac{(1 + \varepsilon) - 1}{(1 + \varepsilon)} \right]^\gamma \right\} \quad (7.71)$$

puis d'effectuer un développement en série de Taylor

$$s_2 - s_1 = c_v \left\{ \left[\frac{2\gamma}{\gamma+1} \varepsilon - \frac{1}{2} \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} \varepsilon \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} \varepsilon \right)^3 + \dots \right] \right\} \quad (7.72)$$

$$+ c_v \left\{ \gamma \left[-\frac{2\varepsilon}{(\gamma+1)(1+\varepsilon)} - \frac{1}{2} \left(\frac{2\varepsilon}{(\gamma+1)(1+\varepsilon)} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{2\varepsilon}{(\gamma+1)(1+\varepsilon)} \right)^3 + \dots \right] \right\},$$

dont nous déduisons,

$$s_2 - s_1 = c_v \frac{2\gamma(\gamma-1)}{3(\gamma+1)^2} \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4). \quad (7.73)$$

Nous pouvons ainsi exprimer la différence d'entropie en fonction de l'intensité du choc $\Pi' = \frac{p_2 - p_1}{p_1}$

$$s_2 - s_1 = c_v \frac{1}{12} \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} \Pi'^3 + O(\Pi'^4) \quad (7.74)$$

Ainsi, pour $\Pi' \ll 1$, l'entropie est presque invariable et à la limite lorsque ε tend vers zéro, l'intensité du choc tend aussi vers zéro. Nous obtenons alors une onde acoustique dont la vitesse de propagation est donnée par la vitesse du son.

7.3.2 Relation de Rankine-Hugoniot

Dans le cas d'un gaz parfait, nous avons

$$h = c_p T = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho}, \quad (7.75)$$

ce qui permet d'écrire (7.37) sous la forme

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} - \frac{2\gamma}{\gamma-1}}{1 - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{\rho_1}{\rho_2}} = f\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right), \quad (7.76)$$

que nous comparons avec la relation isentrope

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^\gamma = g \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right). \quad (7.77)$$

La figure 7.5 représente une comparaison du rapport $\frac{p_2}{p_1}$ en fonction de $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ entre les relations isentrope et de Rankine-Hugoniot.

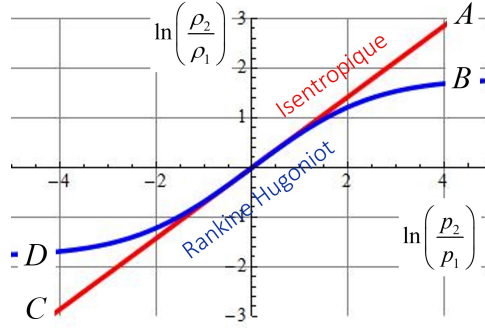


FIGURE 7.5 – Représentation des relations isentrope et d'Hugoniot

Par hypothèse, l'entropie est constante et égale à s_1 en tout point de AC . D'autre part, tous les points en-dessous de AC (ou au-dessus) ont une entropie supérieure (ou inférieure) à s_1 . En effet, l'état du fluide en B est obtenu à partir de l'état en A en diminuant ρ à p constant. Or, nous avons

$$s = c_v \ln \left(\frac{p}{\rho} \right)^\gamma + s_0, \quad (7.78)$$

dont nous déduisons que l'entropie en B est supérieure à s_1 . Par ailleurs, seule la branche OB correspond à des évolutions physiquement réalisables, puisque l'entropie variant au cours de son passage à travers le choc doit nécessairement croître en vertu du second principe. Or, la branche OB correspond aux valeurs positives de $\ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$ donc à des valeurs positives de $\ln \frac{p_2}{p_1}$. Par conséquent, la pression croît à travers le choc. Une onde de choc droite est donc une onde de compression.

7.3.3 Relations entre les vitesses de part et d'autre du choc

Considérons maintenant la conservation de la quantité de mouvement (Equation 7.24) écrite sous la forme

$$w_{n,2} - w_{n,1} = \frac{p_1}{\rho_1 w_{n,1}} - \frac{p_2}{\rho_2 w_{n,2}}, \quad (7.79)$$

puis la conservation de l'énergie (4.38) exprimée par la relation suivante, obtenue en introduisant la condition sonique

$$\frac{p}{\rho w} = \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{a_*^2}{w} - \frac{\gamma - 1}{2\gamma} w. \quad (7.80)$$

Cette condition sonique existe obligatoirement de par la forme de l'équation de conservation d'énergie, mais évidemment ne se produit pas physiquement à l'intérieur du choc.

Ainsi, par substitution de (7.80) dans (7.79), nous avons

$$w_{n,2} - w_{n,1} = \frac{\gamma + 1}{2\gamma} a_*^2 \left(\frac{1}{w_{n,1}} - \frac{1}{w_{n,2}} \right) + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} (w_{n,2} - w_{n,1}), \quad (7.81)$$

ce qui s'écrit aussi sous la forme

$$(w_{n,2} - w_{n,1}) \left[1 - \frac{\gamma - 1}{2\gamma} - \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{a_*^2}{w_{n,1} w_{n,2}} \right] = 0, \quad (7.82)$$

dont la solution $w_{n,2} = w_{n,1}$ ne nous intéresse pas. Il reste ainsi

$$\left[1 - \frac{\gamma - 1}{2\gamma} - \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{a_*^2}{w_{n,1} w_{n,2}} \right] = 0, \quad (7.83)$$

dont nous déduisons

$$w_{n,1}w_{n,2} = a_*^2. \quad (7.84)$$

Le produit des vitesses de part et d'autre du choc est égal au carré de la vitesse critique. Cette relation est connue sous le nom de *relation de Prandtl*. Deux solutions semblent possibles. Cependant, l'évolution à travers le choc n'est pas isentrope et par conséquent $s_2 > s_1$, et donc $p_2 > p_1$, soit $\rho_2 > \rho_1$. Ainsi, avec la conservation de la masse (Equation 7.23)

$$\frac{w_{n,2}}{w_{n,1}} = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad (7.85)$$

nous aboutissons à la condition

$$w_{n,1} > w_{n,2}, \quad (7.86)$$

qui exprime le fait que l'écoulement est toujours supersonique à l'amont d'un choc droit et subsonique à l'aval.

7.3.4 Pression totale et col sonique de part et d'autre du choc

Une relation pratique que l'on peut obtenir à partir de la relation (5.47) est la suivante

$$p_0 A_* = \text{const.} \quad (7.87)$$

En effet, considérons les deux écoulements isentropes de chaque coté d'un choc droit dans une tuyère. Nous savons que la température totale ne change pas, soit $T_{0,1} = T_{0,2} = T_0$, où l'indice (1) correspond à l'écoulement supersonique avant le choc et l'indice (2) à l'écoulement subsonique après le choc. En vertu de la conservation de la masse, il est possible d'écrire pour un débit \dot{m} donné conservé à travers le choc et d'après (5.47)

$$(\rho_0 a_0 A_*)_1 = (\rho_0 a_0 A_*)_2, \quad (7.88)$$

mais comme

$$\rho_0 a_0 = \rho_0 \sqrt{\gamma r T_0} = \frac{p_0}{r T_0} \sqrt{\gamma r T_0}, \quad (7.89)$$

nous avons l'égalité

$$\frac{p_{0,1}}{r T_0} \sqrt{\gamma r T_0} A_{*,1} = \frac{p_{0,2}}{r T_0} \sqrt{\gamma r T_0} A_{*,2}, \quad (7.90)$$

et finalement, après simplification des termes constants

$$p_{0,1} A_{*,1} = p_{0,2} A_{*,2}. \quad (7.91)$$

Tout se passe pour l'écoulement subsonique, comme si l'on considère une autre tuyère de section au col $A_{*,2}$, et de pression génératrice $p_{0,2}$.

Chapitre 8

Ondes de choc obliques

Une onde de choc oblique est telle que la vitesse de l'écoulement en amont du choc n'est pas perpendiculaire au choc. L'étude de ces ondes est justifiée car l'expérience montre qu'elles se produisent effectivement, soit à l'avant d'obstacles pointus placés dans un écoulement supersonique, soit lors d'une variation brusque de la direction d'une paroi.

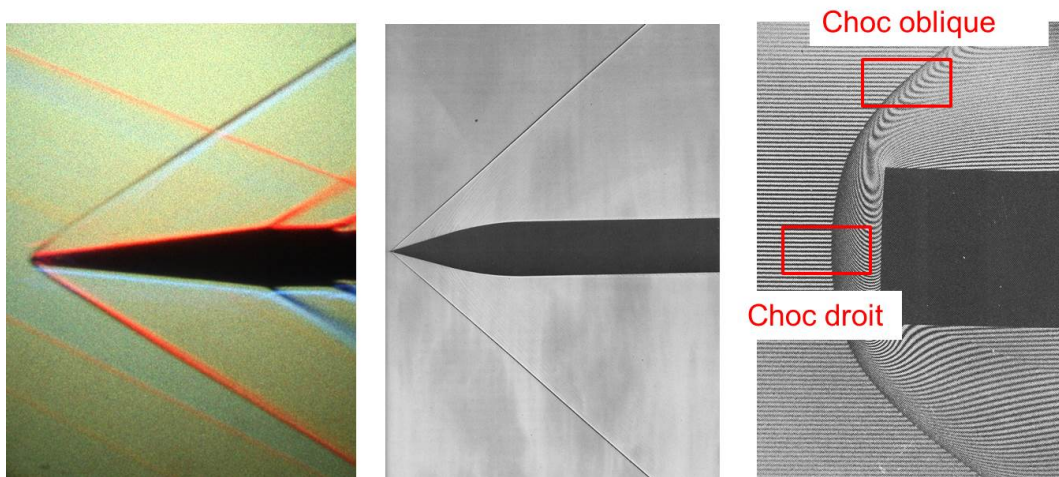


FIGURE 8.1 – Exemples d'ondes de choc oblique : ondes de choc bidimensionnelle sur le bord d'attaque d'un dièdre; onde de choc conique sur un corps axisymétrique; onde de choc courbe présentant à la fois des parties droites et des parties obliques.

8.1 Equations de conservation pour les ondes de choc obliques

8.1.1 Volume de contrôle

Comme pour le cas des ondes de choc droites, un référentiel fixe par rapport à l'onde sera choisi afin de faciliter le traitement. On choisit un volume de contrôle englobant le choc, comme illustré sur la Figure 8.2 ci-dessous.

A l'amont du choc (région 1), l'écoulement est uniforme et, à l'aval dans la région 2, l'écoulement est lui aussi uniforme mais les variables d'état sont différentes après la surface de discontinuité.

Les hypothèses concernant le volume de contrôle sont identiques à celle du choc droit (Chapitre 7).

La distinction par rapport au cas des ondes de choc droites apparaît au niveau des vecteurs vitesse en amont et en aval du choc. En amont, le vecteur vitesse n'est pas perpendiculaire au choc (de par la définition d'une onde de choc oblique). En particulier, il est possible de décomposer le vecteur vitesse en une composante normale au choc, $w_{n,1}$, et une composante tangentielle au choc, $w_{t,1}$. En aval, la direction du vecteur vitesse n'est pas a priori connue. Comme en amont, elle peut être décomposée en une composante normale, $w_{n,2}$, et une composante tangentielle, $w_{nt,2}$, au choc.

La pression, la vitesse, la masse volumique, l'enthalpie et la température de la région 1 subissent la

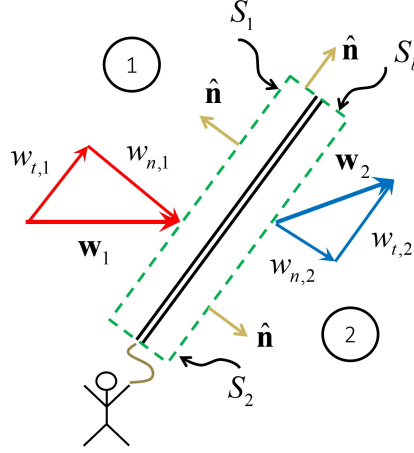


FIGURE 8.2 – Volume de contrôle pour une onde de choc oblique.

variation

$$\begin{aligned}
 p_1 &\rightarrow p_2, \\
 w_{n,1} &\rightarrow w_{n,2}, \\
 w_{t,1} &\rightarrow w_{t,2}, \\
 \rho_1 &\rightarrow \rho_2, \\
 h_1 &\rightarrow h_2, \\
 T_1 &\rightarrow T_2,
 \end{aligned} \tag{8.1}$$

entre les régions 1 et 2. Dès lors, le problème du choc oblique est exactement celui du choc droit et peut s'énoncer de la manière suivante. Etant données les grandeurs $p_1, w_{n,1}, w_{t,1}, \rho_1, h_1, T_1$ connues à l'amont, déterminer les grandeurs $p_2, w_{n,2}, w_{t,2}, \rho_2, h_2, T_2$ à l'aval du choc. Pour la résolution de ce problème, nous utilisons les équations de conservation ainsi que les équations constitutives.

8.1.2 Conservation de la masse

On utilise l'équation de conservation de la masse sous la forme (Equation 3.1)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = 0. \tag{8.2}$$

En se plaçant dans un référentiel coïncidant avec le choc, le vecteur vitesse devient $\mathbf{u} = \mathbf{w}$. Le premier terme contenant la dérivée temporelle peut être négligé selon les critères énoncés précédemment. De même, toute intégration sur les "bords" est également négligeable. Ainsi, on se retrouve avec la relation

$$\int_{S_1, S_2} \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dS = 0, \tag{8.3}$$

laquelle devient

$$-\int_{S_1} \rho w_n dS + \int_{S_2} \rho w_n dS = 0, \tag{8.4}$$

où w_n est la composante de \mathbf{w} perpendiculaire au choc, $w_n = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}$. Comme les faces sont prises assez petites pour que les propriétés soient uniformes de part et d'autre du choc le long de ces faces, et que les deux surfaces S_1 et S_2 ont la même aire (du fait qu'elles soient très proches l'une de l'autre), on a alors

$$\rho_1 w_{n,1} = \rho_2 w_{n,2}. \tag{8.5}$$

Cette relation est identique à celle trouvée pour une onde de choc droite.

8.1.3 Conservation de la quantité de mouvement

D'une manière similaire, on utilise l'équation de conservation de quantité de mouvement sous forme intégrale (Equation 3.4)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \mathbf{u} dV + \int_S \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = - \int_S p \mathbf{n} dS + \int_S \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dS + \int_V \rho \mathbf{f} dV, \quad (8.6)$$

où \mathbf{T} représente le tenseur des contraintes visqueuses et \mathbf{f} le vecteur des forces volumiques. L'intégration sur le volume de la quantité de mouvement (celle faisant intervenir une dérivée par rapport au temps) peut être négligée du fait d'un volume choisi comme infiniment petit (il ne peut pas y avoir de stockage de quantité de mouvement). Par le même argument, l'intégrale volumique des forces de volume (gravité) est négligeable pour un volume infiniment petit. Comme les faces S_1 et S_2 sont choisies hors du choc, les contraintes visqueuses y sont négligeables (par hypothèse, l'écoulement est isentropique de part et d'autre du choc). Le choix d'un volume de contrôle très fin permet d'éliminer les termes faisant intervenir des intégrations sur les bords (S_b), ce qui est commode car les contraintes visqueuses y sont conséquentes et non connues. Ainsi

$$\int_{S_1, S_2} \rho \mathbf{w} (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) dS = - \int_{S_1, S_2} p \mathbf{n} dS. \quad (8.7)$$

Cette relation est vectorielle. La projection selon la *normale* \mathbf{n} au choc produit alors

$$-\rho_1 w_{n,1} w_{n,1} + \rho_2 w_{n,2} w_{n,2} = p_1 - p_2, \quad (8.8)$$

ou

$$p_1 + \rho_1 w_{n,1}^2 = p_2 + \rho_2 w_{n,2}^2, \quad (8.9)$$

qui, encore une fois, est identique à celle d'un choc droit.

La projection selon la *tangente* au choc conduit à

$$-\rho_1 w_{t,1} (w_{n,1}) + \rho_2 w_{t,2} (w_{n,2}) = 0, \quad (8.10)$$

qui peut être réécrite sous la forme

$$-w_{t,1} (\rho_1 w_{n,1}) + w_{t,2} (\rho_2 w_{n,2}) = 0. \quad (8.11)$$

La conservation de masse, $\rho_1 w_{n,1} = \rho_2 w_{n,2}$, dicte alors que

$$w_{t,1} = w_{t,2}. \quad (8.12)$$

La composante de la vitesse tangentielle au choc est donc invariante.

8.1.4 Conservation de l'énergie

Soit l'équation de conservation d'énergie

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho e_0 dV + \int_S (\rho e_0 \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS = - \int_S p \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS + \int_S (\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS + \int_V \rho (\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}) dV - \int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS + \int_V r dV, \quad (8.13)$$

où

$$e_0 = e + \frac{1}{2} u^2. \quad (8.14)$$

Avec les mêmes hypothèses que pour le cas du choc droit, on obtient

$$\int_{S_1, S_2} (\rho e_0 \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS = - \int_{S_1, S_2} p \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (8.15)$$

qui peut se réécrire dans le repère du choc (pour des surface S_1 et S_2 égales)

$$\rho_2 \left(e_2 + \frac{w_{n,2}^2 + w_{t,2}^2}{2} \right) w_{n,2} - \rho_1 \left(e_1 + \frac{w_{n,1}^2 + w_{t,1}^2}{2} \right) w_{n,1} = -p_2 w_{n,2} + p_1 w_{n,1}. \quad (8.16)$$

En introduisant l'enthalpie $h = e + p/\rho$

$$\rho_1 \left(h_1 + \frac{w_{n,1}^2 + w_{t,1}^2}{2} \right) w_{n,1} = \rho_2 \left(h_2 + \frac{w_{n,2}^2 + w_{t,2}^2}{2} \right) w_{n,2}, \quad (8.17)$$

et en invoquant la conservation de masse, on obtient alors

$$h_1 + \frac{w_{n,1}^2 + w_{t,1}^2}{2} = h_2 + \frac{w_{n,2}^2 + w_{t,2}^2}{2}. \quad (8.18)$$

Comme la composante de la vitesse tangentielle au choc est invariante, l'équation de conservation d'énergie peut s'écrire sous les deux formes équivalentes

$$\left[h + \frac{w^2}{2} \right] = 0, \quad (8.19)$$

$$\left[h + \frac{w_n^2}{2} \right] = 0. \quad (8.20)$$

8.1.5 Entropie

Comme pour le cas du choc droit, le deuxième principe de la thermodynamique appliqué au volume de contrôle impose la condition

$$[s] > 0. \quad (8.21)$$

8.2 Géométrie

Les ondes de chocs droites et obliques diffèrent de par la géométrie de l'écoulement. L'onde décrit un angle θ par rapport à l'écoulement en amont. L'écoulement en aval est dévié d'un angle δ par rapport à l'écoulement en amont. Ainsi

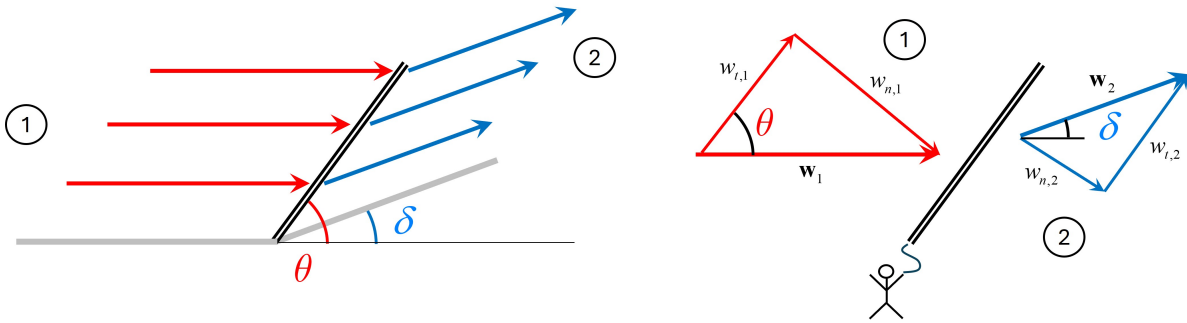


FIGURE 8.3 – Définition des angles pour le cas d'une onde de choc oblique.

Alors que pour un choc droit le nombre de Mach de l'écoulement était identique au nombre de Mach normal, il n'en est pas ainsi pour les ondes de choc obliques. En particulier, de simples considérations géométriques conduisent aux résultats suivants

Choc droit	Choc oblique	
$M_{n,1} = M_1$	$M_{n,1} = M_1 \sin \theta$	(8.22)
$M_{n,2} = M_2$	$M_{n,2} = M_2 \sin(\theta - \delta)$	

8.2.1 Interprétation Galiléenne des ondes de chocs obliques

Soit une onde de choc normale, stationnaire par rapport à un observateur, comme indiqué sur le schéma ci-dessous. Si l'observateur est mis en mouvement et se déplace maintenant le long du choc avec

une vitesse $-w_t$, l'écoulement dans le nouveau repère de l'observateur a alors la configuration du schéma de droite. La géométrie de l'écoulement dans ce nouveau référentiel est celui d'une onde de choc oblique (une simple rotation du schéma redonne la Figure 8.3). Ceci est le cas car les composantes tangentielles de la vitesse de part et d'autre du choc sont identiques (ce qui nous a permis de choisir un référentiel mobile). Comme les propriétés thermodynamiques sont indépendantes du référentiel, ces simples considérations conduisent au résultat que les ondes de chocs obliques doivent satisfaire les mêmes relations que les ondes de chocs droites.

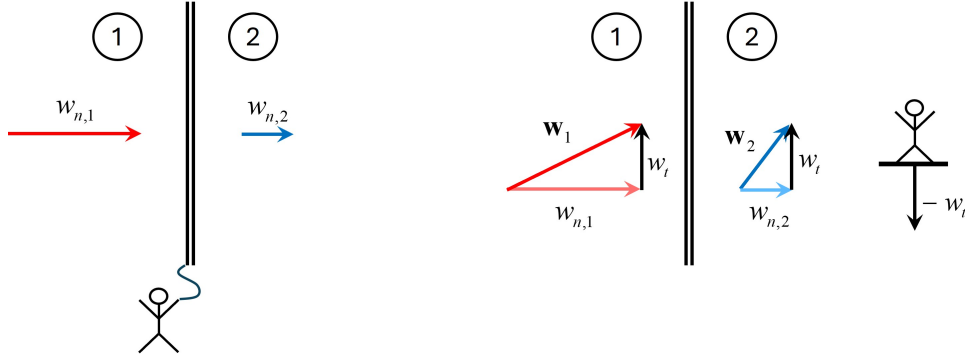


FIGURE 8.4 – Observateur stationnaire par rapport à une onde de choc normale, et observateur en mouvement le long de la même onde de choc.

8.3 Relations entre variables thermodynamiques de part et d'autre du choc oblique

8.3.1 Equivalence avec les ondes de choc droites

Les chocs droits et obliques répondent exactement aux mêmes équations de conservation et constitutives. De plus, comme seule la composante *normale* intervient, les relations liant les variables d'état à l'amont et à l'aval du choc sont identiques pour les deux problèmes du choc droit et du choc oblique. Il est donc inutile de les réécrire. Il suffit d'utiliser les résultats du Chapitre 7, en s'assurant d'utiliser le nombre de Mach normal, $M_{n,1} = M_1 \sin \theta$.

8.3.2 Condition d'existence

Alors que dans le cas des ondes de chocs droites, l'existence du choc demandait que l'écoulement en amont soit *supersonique*, cette condition n'est plus suffisante pour les ondes de chocs obliques. La condition d'existence du choc impose que le nombre de Mach normal, $M_{n,1}$, soit supérieur à 1. Ainsi, l'existence d'une onde de choc oblique demande que

$$M_1 \sin \theta \geq 1. \quad (8.23)$$

8.3.3 Relations thermodynamiques pour un gaz parfait

En reprenant les relations écrites pour une onde de choc normale en fonction de $M_{n,1}$ (Equations 7.60 à 7.62), et en insérant l'expression $M_{n,1} = M_1 \sin \theta$, nous obtenons les résultats suivants en fonction du nombre de Mach absolu M_1 et de l'angle de l'onde de choc θ

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2}{\gamma + 1} \left(\gamma M_1^2 \sin^2 \theta - \frac{\gamma - 1}{2} \right) = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 \sin^2 \theta - 1), \quad (8.24)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{w_{n,1}}{w_{n,2}} = \frac{\gamma + 1}{2} \frac{M_1^2 \sin^2 \theta}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \sin^2 \theta}, \quad (8.25)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{\rho_1}{\rho_2} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^2 \frac{1}{M_1^2 \sin^2 \theta} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \sin^2 \theta \right) \left(\gamma M_1^2 \sin^2 \theta - \frac{\gamma - 1}{2} \right), \quad (8.26)$$

puis, de la même manière avec (7.59) et (7.68)

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \left\{ \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 \sin^2 \theta - 1) \right] \left[1 - \frac{2}{\gamma + 1} \frac{M_1^2 \sin^2 \theta - 1}{M_1^2 \sin^2 \theta} \right]^\gamma \right\}, \quad (8.27)$$

$$M_2^2 = \frac{1}{\sin^2(\theta - \delta)} \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \sin^2 \theta}{\gamma M_1^2 \sin^2 \theta - \frac{\gamma - 1}{2}}. \quad (8.28)$$

8.3.4 Géométrie

Si le nombre de Mach M_1 et l'angle de l'onde de choc θ sont connus, la procédure suivante serait utilisée pour résoudre le problème. En effet, les nombres de Mach normal et tangent au choc peuvent être évalués à partir de

$$M_{n,1} = M_1 \sin \theta, \quad (8.29)$$

$$M_{t,1} = M_1 \cos \theta. \quad (8.30)$$

La valeur de $M_{n,1}$ et les relations des ondes de choc droites (Chapitre 7) peuvent alors être utilisées pour la détermination de $M_{n,2}$ et des valeurs thermodynamiques en aval du choc (en supposant que les valeurs en amont sont connues). Comme la composante tangentielle du vecteur vitesse est invariante de part et d'autre du choc, il est possible d'écrire

$$w_{t,1} = w_{t,2}, \quad (8.31)$$

ce qui peut s'exprimer

$$M_{t,1} \sqrt{\gamma r T_1} = M_{t,2} \sqrt{\gamma r T_2}, \quad (8.32)$$

permettant d'obtenir

$$M_{t,2} = M_{t,1} \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}. \quad (8.33)$$

L'évaluation de M_2 à partir de

$$M_2^2 = M_{n,2}^2 + M_{t,2}^2 \quad (8.34)$$

permet alors d'obtenir l'angle de déviation de l'écoulement δ selon la relation suivante

$$\sin(\theta - \delta) = \frac{M_{n,2}}{M_2}. \quad (8.35)$$

La relation (8.28) fait intervenir l'angle de déviation de l'écoulement δ , angle entre \mathbf{w}_1 et \mathbf{w}_2 , pour le calcul du nombre de Mach M_2 . D'après la géométrie du problème,

$$\tan \theta = \frac{w_{n,1}}{w_{t,1}} \quad \text{et} \quad \tan(\theta - \delta) = \frac{w_{n,2}}{w_{t,2}}, \quad (8.36)$$

et nous avons immédiatement en vertu de (8.25) et de la propriété $w_{t,1} = w_{t,2}$

$$\frac{\tan(\theta - \delta)}{\tan \theta} = \frac{w_{n,2}}{w_{n,1}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2 \sin^2 \theta}{(\gamma + 1) M_1^2 \sin^2 \theta}, \quad (8.37)$$

qui est une relation implicite de δ , θ et M_1 . En réarrangeant les termes, il est possible de faire apparaître la relation explicite de δ en fonction de M_1 et θ

$$\tan \delta = 2 \cot \theta \frac{M_1^2 \sin^2 \theta - 1}{M_1^2 (\gamma + \cos 2\theta) + 2}. \quad (8.38)$$

Si M_1 et θ sont connus, cette relation permet d'obtenir δ directement (solution unique). Dans une autre catégorie de problèmes (écoulements autour de profils aérodynamiques), l'angle δ est connu et il

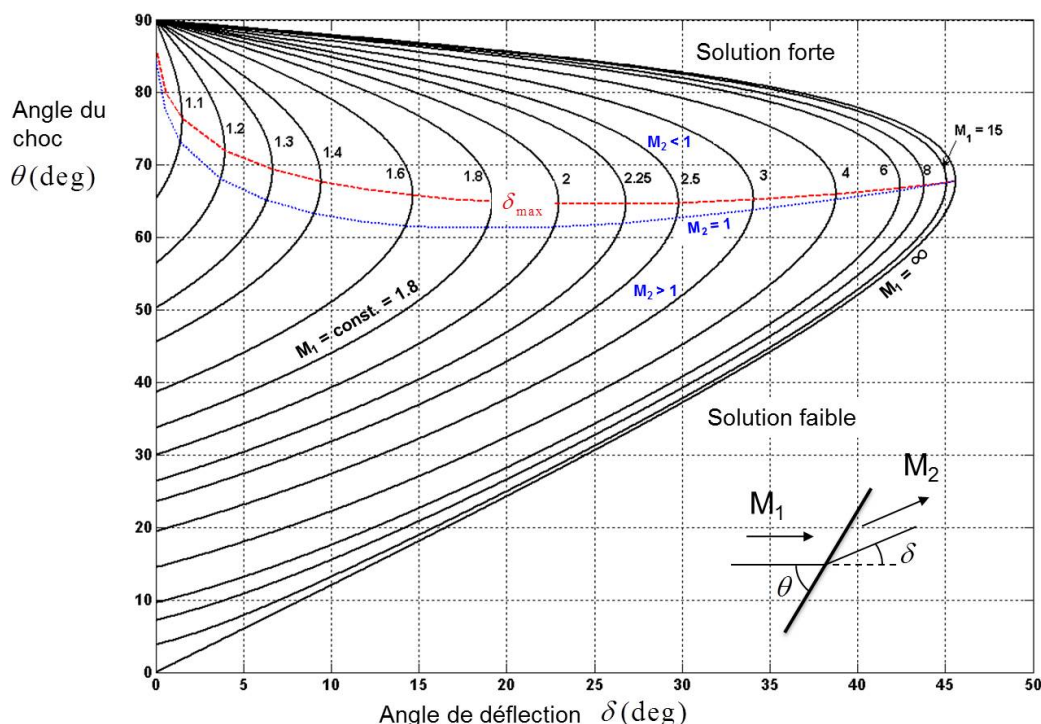


FIGURE 8.5 – Variation de l'angle du choc en fonction de la déflexion de l'écoulement, pour l'air ($\gamma = 1.4$).

s'agit de trouver θ à partir de la relation 8.38. La Figure 8.5 est une représentation de la variation de θ en fonction de δ .

Ce diagramme a été tracé pour différentes valeurs du paramètre M_1 . Plusieurs remarques s'imposent.

* Pour un nombre de mach M_1 donné, il existe deux solutions de θ pour chaque valeur de δ , pour autant que δ soit inférieur à une valeur maximum δ_{\max} . Ces deux solutions sont dénotées *solution faible* ou *solution forte* selon que la valeur de θ est petite ou grande. D'une manière générale, la solution faible est la plus commune. Nous verrons plus loin dans quels cas on rencontre la solution forte. Parfois, on dénote ces solutions comme correspondant à un *choc faible* ou un *choc fort*. La solution faible donne effectivement lieu à une différence de pression plus faible de part et d'autre du choc par rapport à la solution forte, et donc la solution faible fournit un choc plus faible que la solution forte. Cependant, bien que les deux solutions correspondent à deux chocs d'intensité différente, il n'est pas vrai que l'on aura un choc fort (ou faible) de manière absolue pour la solution forte (ou faible). Par exemple, si l'on prend la courbe pour $M_1 = 1.1$, il existe bien deux solutions, une où le choc est plus fort que l'autre, mais dans les deux cas, le choc est de petite intensité de par la valeur du nombre de Mach proche de 1.

* Quand δ tend vers zéro, il existe deux solutions pour θ , une proche de 90 degrés (choc droit) et une deuxième correspondant à la solution faible. Nous allons montrer que cette solution correspond à une onde de Mach. Une onde de Mach est caractérisée par le fait que l'écoulement est isentropique et n'est pas dévié de sa trajectoire. De ce fait, une onde de Mach est telle que $\delta \rightarrow 0$. A partir de l'expression (8.38)

$$\tan \delta = 2 \cot \theta \frac{M_1^2 \sin^2 \theta - 1}{M_1^2 (\gamma + \cos 2\theta) + 2}, \quad (8.39)$$

lorsque δ tend vers zéro, $\tan \delta$ tend aussi vers zéro et, par conséquent, le numérateur de (8.39) doit suivre le même comportement. Nous en déduisons que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \tan \delta = 0 \quad \rightarrow \quad M_1^2 \sin^2 \theta - 1 = 0, \quad (8.40)$$

ce qui fournit l'angle d'une onde de Mach

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \theta = \mu = \arcsin \left(\frac{1}{M_1} \right). \quad (8.41)$$

* Il existe une valeur maximale de δ pour une valeur de M_1 donnée. Au delà de cette valeur maximale, il ne semble plus y avoir de solution pour θ . Cette situation correspond à une rampe ou un dièdre d'ouverture trop grande. Il ne peut exister d'onde de choc oblique. Le choc se détache alors et on n'a plus une onde de choc oblique *attachée* mais une onde de choc *détachée*, qui sera généralement droite près de l'axe de symétrie et courbe plus loin, et située légèrement en amont de la rampe ou du dièdre. D'une manière équivalente, le nombre de Mach doit avoir une valeur minimale pour qu'il puisse exister une onde de choc oblique pour une valeur δ donnée, sinon le choc sera détaché.

* Plus le nombre de Mach M_1 augmente, plus il est facile d'avoir une onde de choc oblique attachée (δ_{\max} augmente). Pour une valeur constante de δ , l'angle de l'onde de choc oblique (pour la solution faible) diminue (pour le cas de la solution forte, cet angle augmenterait).

* Le nombre de Mach en aval du choc peut être soit inférieur soit supérieur à 1. La solution forte génère toujours un écoulement subsonique en aval du choc. Il n'en est pas ainsi pour la solution faible. Le diagramme 8.5 montre la ligne de démarcation $M_2 = 1$. Bien que cette ligne soit proche de la ligne séparant la solution faible de la solution forte ($\delta = \delta_{\max}$), elle ne coïncide pas avec cette dernière. Il peut exister des solutions faibles avec un écoulement subsonique en aval.

* Il existe une valeur de δ maximale au delà de laquelle une onde choc oblique n'est pas possible, quelle que soit la valeur du nombre de Mach. Pour l'air, cet angle est légèrement supérieur à 45 degrés.

8.4 Phénomènes associés aux chocs

8.4.1 Choc attaché et choc détaché

Pour un nombre de Mach donné M_1 , nous avons vu qu'il existe un angle de déviation maximum δ_{\max} . Si la géométrie est telle que $\delta < \delta_{\max}$, on voit apparaître un choc oblique rectiligne et attaché au coin du dièdre ou au nez de l'objet pointu. Cependant dans ce cas, il existe deux solutions de choc oblique rectiligne (Fig. 8.6). En écoulement externe, la solution faible est généralement la plus commune. En écoulement confiné ou avec des conditions ou des géométries en aval conduisant à des interférences, il est possible, mais rare, d'obtenir la solution forte.

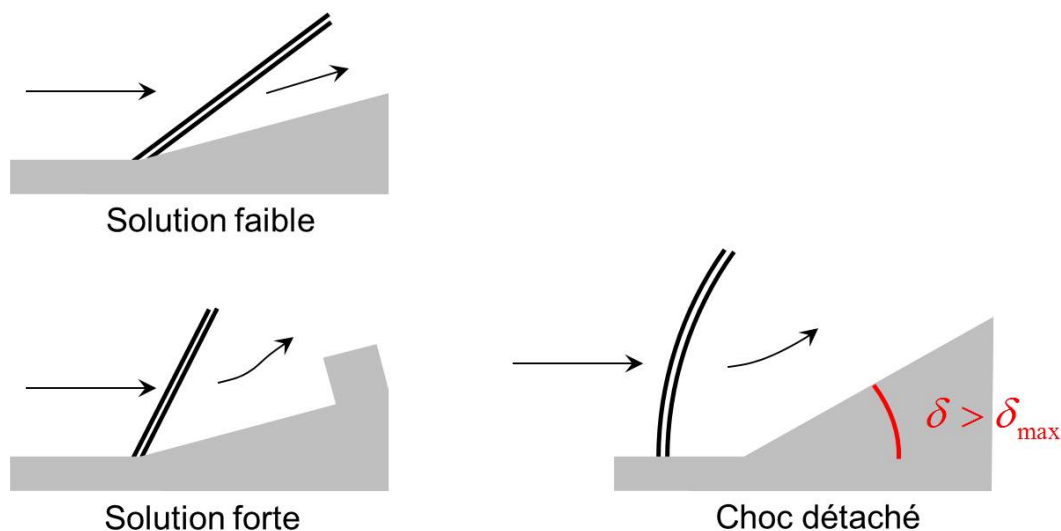


FIGURE 8.6 – Chocs attaché et détaché

Inversement si $\delta > \delta_{\max}$, aucune solution n'existe pour une onde de choc oblique rectiligne. La nature met cependant en place une onde de choc courbe et détaché du nez du corps pointu ou du dièdre (Fig. 8.6). Elle est normale sur l'axe et s'incline de plus en plus au fur et à mesure que l'on s'éloigne de l'axe. A longue distance, elle a la même inclinaison que les ondes de Mach. Comme la courbure de l'onde de choc change, on peut montrer à l'aide de la formulation de Crocco (Chapitre 3) que derrière le choc l'écoulement est rotationnel (présence de vorticité).

8.4.2 Écoulement supersonique autour de dièdres

L'écoulement supersonique bidimensionnel autour d'un dièdre d'ouverture 2δ est caractérisé par une onde de choc oblique rectiligne attachée au sommet du dièdre à condition que $\delta < \delta_{\max}$. L'écoulement uniforme à l'amont et parallèle à l'axe de symétrie du dièdre (par exemple) est aussi uniforme après le choc et est parallèle à la surface du dièdre (Fig. 8.7). La pression à la surface du dièdre est égale à la pression statique p_2 derrière le choc.

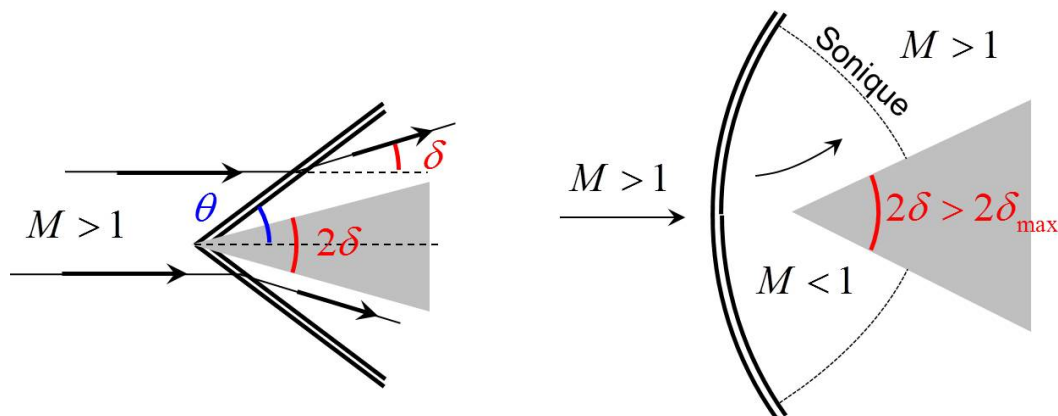


FIGURE 8.7 – Chocs sur un dièdre

Lorsque $\delta > \delta_{\max}$, la distance entre le choc et le nez du dièdre dépend du nombre de Mach aval et de la valeur de δ . Dans la zone proche de l'axe le choc se comporte comme un choc droit et, derrière le choc, l'écoulement est subsonique. Il redevient supersonique en s'éloignant vers l'aval. On aura évidemment un ligne sonique qui apparaîtra lors de l'accélération du fluide.

8.4.3 Réflexion et interaction des chocs

Reflexion d'une onde de choc oblique sur une paroi. Considérons un écoulement supersonique M_1 . Examinons ce qui se passe lorsqu'une onde de choc oblique I rencontre une paroi plane parallèle à l'écoulement (Fig. 8.8). Appelons P le point de rencontre de l'onde I et de la paroi. Après son passage à travers I , l'écoulement est dévié vers la paroi d'un angle δ . La vitesse de la particule en P devant être nécessairement parallèle à la paroi, nous arrivons à une absurdité, à moins d'imaginer une onde de choc oblique R issue de P qui redresse l'écoulement M_2 en le déviant d'un angle $-\delta$. Dans ce cas la vitesse des particules passant par P reste parallèle à la paroi et l'écoulement à nombre de Mach M_3 est un écoulement uniforme de même direction que celui en amont de I . L'onde de choc oblique R est une réflexion sur la paroi de l'onde de choc incidente I .

Cette réflexion n'est pas toujours possible. Il faut non seulement que le nombre de Mach M_2 soit supérieur à l'unité, mais encore que M_2 soit suffisamment grand pour que la déviation imposée soit inférieure à la déviation maximum δ_{\max} réalisable avec une onde de choc oblique. Lorsque δ est supérieur à δ_{\max} correspondant à M_1 , l'expérience montre que la réflexion de l'onde incidente se produit en un point de l'écoulement situé à une certaine distance de la paroi avec formation d'une troisième onde de choc, du type fort et quasi-normale à la paroi (appelée *choc de Mach*). L'onde R est telle que la pression en aval de R est égale à la pression en aval du choc de Mach. L'entropie derrière le choc de Mach et en aval des deux chocs obliques est a fortiori différente. Par suite, il existe une ligne où on a un saut d'entropie à pression constante et où la direction de la vitesse est la même : c'est une ligne ou *surface de contact*.

Interaction de deux ondes de choc de même intensité. Considérons deux ondes de choc oblique I_1 et I_2 créées en deux points quelconques d'un écoulement supersonique et analysons ce qui se passe à leur point de rencontre (Fig. 8.10). On supposera que les deux ondes ont la même intensité. Le plan passant par le point d'intersection est parallèle à l'écoulement amont (symétrie). Pour l'écoulement, tout se passe comme si le choc (par exemple I_1) rencontrait une paroi qui serait ce plan. Il se produit alors

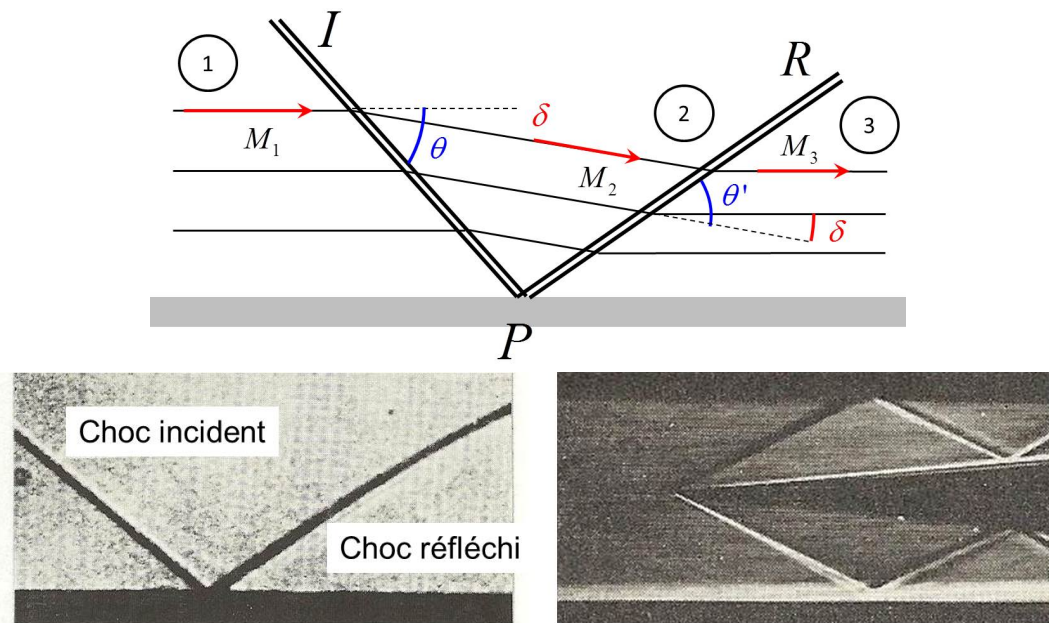


FIGURE 8.8 – Réflexion d'ondes de chocs

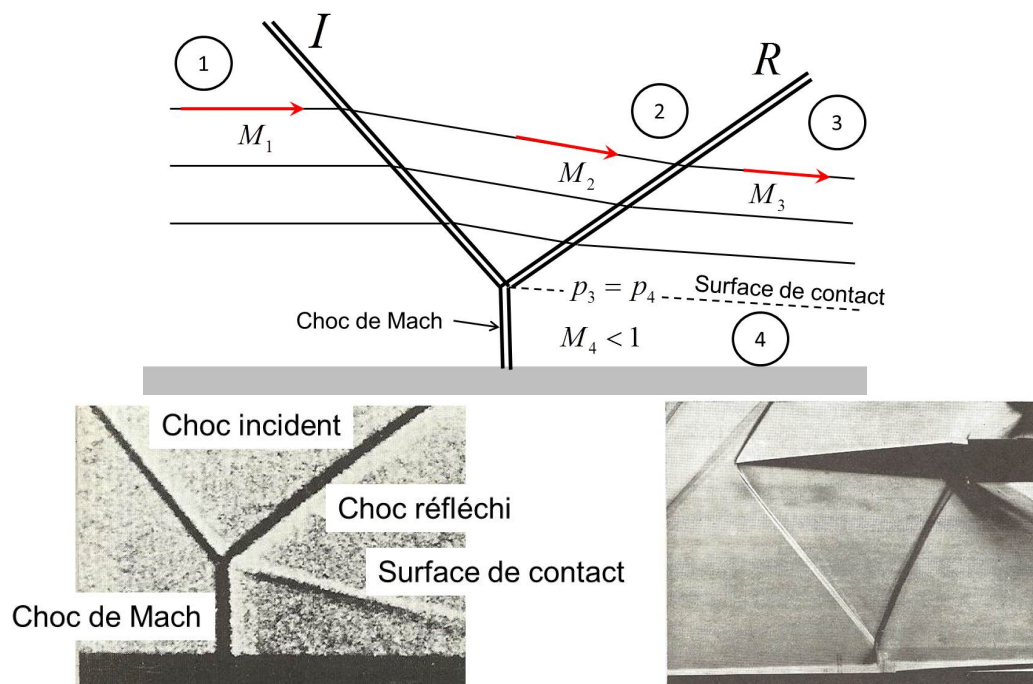


FIGURE 8.9 – Réflexion avec choc de Mach

une onde réfléchi R_1 (et R_2). L'interaction des deux chocs, se caractérise alors par un changement de leur inclinaison en leur point de rencontre : on a donc une réfraction. Dans ce cas, $M_2 = M_3$ et $M_4 = M_5$.

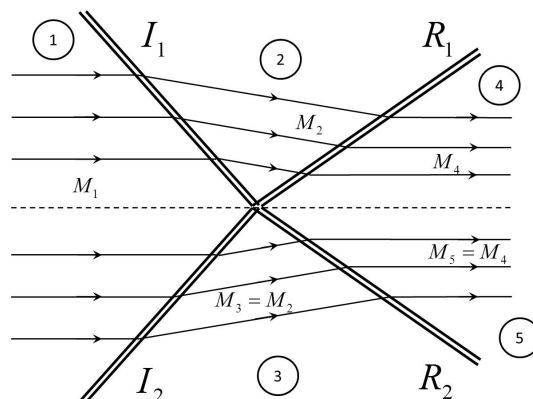


FIGURE 8.10 – Interaction de deux ondes de choc de même intensité

Interaction de deux ondes de choc d'intensité différentes. Considérons un écoulement supersonique M_1 entre deux plaques parallèles (Fig. 8.11). Chacune des plaques a un changement brusque de direction, d'où se propagent des ondes de chocs obliques I_1 et I_2 . Au point d'intersection des deux chocs, l'onde I_1 issue est réfractée et continue en I_1' . De même l'onde I_2 est réfractée et continue à se propager selon I_2' . L'interaction des deux ondes de choc oblique se caractérise donc par une variation de leur inclinaison en leur point de rencontre.

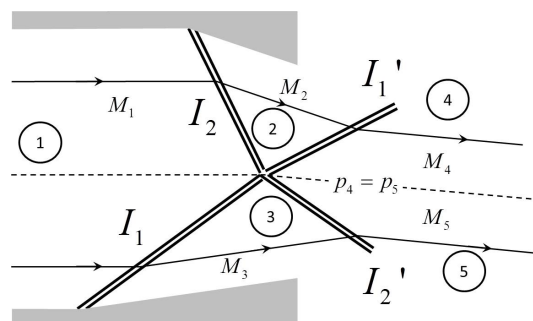


FIGURE 8.11 – Interaction de deux ondes de choc d'intensité différentes

Les intensités des chocs I_2 et I_1 étant en général différentes, l'entropie derrière les deux chocs est aussi différente. Par suite, il existe une ligne où on a un saut d'entropie à pression constante et où la direction de la vitesse est la même : c'est une ligne ou *surface de contact*. De même que pour la réflexion simple d'une onde de choc sur une paroi, il existe une valeur limite $\delta_{\max} = \delta_{\max}(M_1)$. Dans le cas où la déviation δ est supérieure à cette limite, l'expérience montre qu'il se produit une interaction plus complexe faisant intervenir une onde de choc normale à la place du point simple d'intersection des deux ondes de choc obliques.

Choc oblique en sortie de tuyère. Dans certaines conditions d'opération, la pression de sortie est inférieure à la pression arrière, et une onde de choc oblique doit se former afin de comprimer l'écoulement en sortie (Figure 8.12). La surface de contact entre l'écoulement de la tuyère et le fluide ambiant est alors dirigée vers l'intérieur et son angle est celui de la déviation de l'écoulement de sortie suite à sa traversée de l'onde de choc oblique. Il y a donc rétrécissement du jet.

Neutralisation d'une onde de choc. Il peut être intéressant dans la pratique de neutraliser (Fig. 8.13) une onde de choc lors d'une réflexion. Considérons l'onde de choc oblique incidente (générée en amont par un dièdre ou une rampe). Cette onde détourne l'écoulement d'un angle δ vers l'onde, et

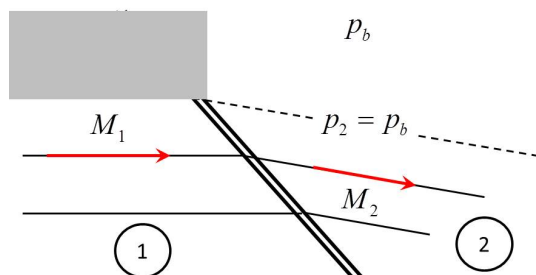


FIGURE 8.12 – Choc oblique en sortie de tuyère

augmente la pression statique du fluide. A l'intersection de l'onde et de la paroi, la condition physique impose que l'écoulement soit parallèle à la paroi. Si la paroi est tournée du même angle δ , alors cette condition physique est vérifiée et il n'y a pas d'onde réfléchie. Par suite, il suffit de faire tourner la paroi de l'angle δ pour neutraliser l'onde de choc oblique.

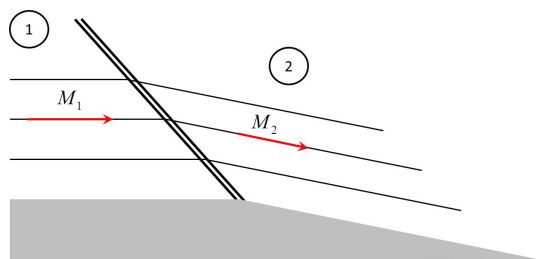


FIGURE 8.13 – Neutralisation d'une onde de choc

Chapitre 9

Ecoulement de Prandtl-Meyer

Jusqu'à présent, nous avons été dans le contexte d'ondes de choc de compression. Cependant, dans un écoulement bi-dimensionnel, une détente (baisse de pression) peut être nécessaire. On a observé que dans le cas *monodimensionnel*, une détente se faisait naturellement dans une tuyère de géométrie adapté au nombre de Mach. Cette détente était d'ailleurs isentropique. Dans ce Chapitre, nous allons développer la machinerie qui permet de détendre un écoulement en plus d'une dimension : c'est ce que nous dénommerons les écoulements de Prandtl-Meyer, qui seront également isentropiques. Ainsi, tous les résultats sur les écoulements isentropiques s'appliqueront dans le Chapitre présent. Une démonstration expérimentale des ces écoulements de Prandtl-Meyer apparaît sur la photo ci-dessous, où, en plus des ondes de choc, sont présentes des régions que l'on démontrera comme étant des ondes de détentes isentropiques.

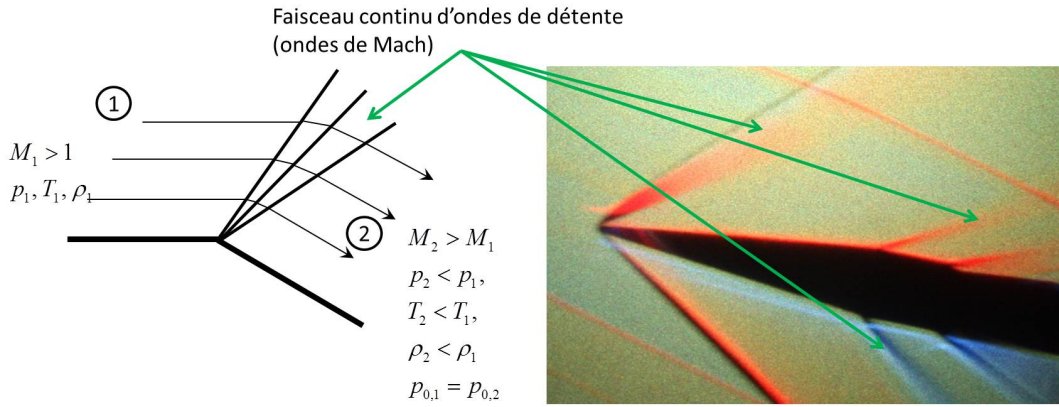


FIGURE 9.1 – Ondes de détente

9.1 Ondes de chocs obliques d'intensité infinitésimale

Dans le diagramme du Chapitre précédent, nous allons nous placer dans le cas où l'onde de choc est d'intensité infinitésimale, c'est à dire proche du cas d'une onde de Mach pour laquelle la déviation de l'écoulement est infinitésimale $\delta \rightarrow 0$ et son angle est $\theta \rightarrow \mu = \sin^{-1}(1/M_1)$. Bien que pour les ondes de chocs de compression nous avons été forcé de ne considérer que les cas $\delta > 0$ afin de respecter le second principe de la Thermodynamique $s_2 > s_1$, nous allons voir que pour des chocs d'intensité infinitésimale des angles de déviation $\delta < 0$ sont autorisés.

A partir de la géométrie d'une onde de choc

$$\tan \theta = \frac{w_{n,1}}{w_{t,1}} \quad \text{et} \quad \tan(\theta - \delta) = \frac{w_{n,2}}{w_{t,2}}, \quad \text{et} \quad w_t = w_{t,1} = w_{t,2}, \quad (9.1)$$

on obtient, avec un peu de manipulation de relations trigonométriques,

$$-\frac{[w_n]}{w_t} = \frac{\tan \delta}{\cos^2 \theta (1 + \tan \theta \tan \delta)}, \quad (9.2)$$

qui devient, en utilisant la relation $w_t/a_1 = M_1 \cos \theta$,

$$-\frac{[w_n]}{a_1} = \frac{M_1 \tan \delta}{\cos \theta + \sin \theta \tan \delta}. \quad (9.3)$$

Avec $M_{n,1} = M_1 \sin \theta$ et la relation 7.30 que nous rappelons

$$\Pi = \frac{[p]}{\rho_1 a_1^2} = -M_{n,1} \frac{[w_n]}{a_1}, \quad (9.4)$$

on obtient ainsi une relation générale entre la différence de pression de part et d'autre d'un choc (pour un fluide arbitraire, non nécessairement un gaz parfait), sa géométrie, et le nombre de Mach en amont

$$\frac{\Pi}{M_1^2} = \frac{\tan \delta}{\cot \theta + \tan \delta}. \quad (9.5)$$

Pour des ondes de chocs obliques d'intensité infinitésimale, on a $\theta \rightarrow \mu$ et $\delta \rightarrow \Delta\delta$, ce qui conduit à

$$\lim_{\delta \rightarrow \Delta\delta} \frac{\Pi}{M_1^2} = \frac{\Delta\delta}{\cot \mu} = \frac{\Delta\delta}{\sqrt{M_1^2 - 1}}, \quad (9.6)$$

où l'on a utilisé les relations pour des ondes de Mach ($\sin \mu = 1/M_1$, $\cos \mu = \sqrt{M_1^2 - 1}/M_1$, $\cot \mu = \sqrt{M_1^2 - 1}$). Or, dans le Chapitre sur les ondes de chocs droites, le saut en entropie pour des ondes de chocs faibles a été évalué pour des fluides quelconques

$$\frac{T_1[s]}{a_1^2} = \frac{1}{6} \Gamma_1 \Pi^3 + O(\Pi^4), \quad (9.7)$$

ce qui mène à la relation suivante

$$\lim_{\delta \rightarrow \Delta\delta} \frac{T_1[s]}{a_1^2} = \frac{\Gamma_1}{6} \frac{M_1^6}{(M_1^2 - 1)^{3/2}} (\Delta\delta)^3. \quad (9.8)$$

Nous allons montrer que cette relation permet de dévier l'écoulement d'une manière isentropique sur un angle arbitraire, positif (compression) ou négatif (détente). Si l'on considère un grand nombre n de rampes, chacune déviant l'écoulement d'un petit angle $\Delta\delta = \delta/n$, l'écoulement pourra ainsi être dévié au final d'un angle fini $n\Delta\delta = n(\delta/n) = \delta$.

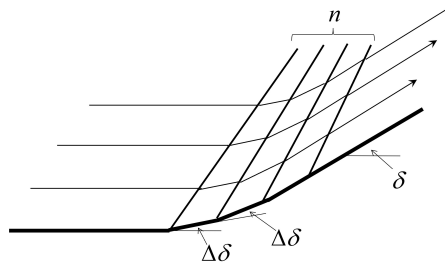


FIGURE 9.2 – Compression à travers une succession d'ondes de chocs obliques d'intensité infinitésimale

Pour chacune des rampes infinitésimales, le saut en entropie à travers chaque onde infinitésimale est

$$[s]_i = k_i (\Delta\delta)^3 = k_i \left(\frac{\delta}{n} \right)^3, \quad (9.9)$$

où le coefficient k_i dépend du nombre de Mach local selon la relation 9.8. Au bout des n rampes

$$[s] = \sum_{i=1}^n [s]_i = \sum_{i=1}^n k_i \left(\frac{\delta}{n} \right)^3 = \frac{\delta^3}{n^2} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i \right) = \frac{\delta^3}{n^2} \bar{k}, \quad (9.10)$$

où \bar{k} est une moyenne (finie) du coefficient sur les n rampes. Comme δ et \bar{k} sont finis, il en résulte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [s] = \delta^3 \bar{k} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0. \quad (9.11)$$

Ainsi, avec une succession d'ondes de chocs obliques infinitésimales, il est possible de dévier un écoulement de manière isentropique. De plus, comme à chaque rampe $[p]_i \sim \Delta\delta$ (Equation 9.6), le saut en pression à la suite de plusieurs rampes sera proportionnelle à l'angle de déviation final

$$[p] = \sum_{i=1}^n [p]_i = \sum_{i=1}^n K_i \Delta\delta = \sum_{i=1}^n K_i \left(\frac{\delta}{n} \right) = n \left(\frac{\delta}{n} \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_i \right) = \delta \cdot \bar{K}. \quad (9.12)$$

Il est donc possible de comprimer ou de détendre (car δ peut être négatif) l'écoulement de manière isentropique par une succession d'ondes de chocs obliques d'intensité infinitésimales (ondes de Mach).

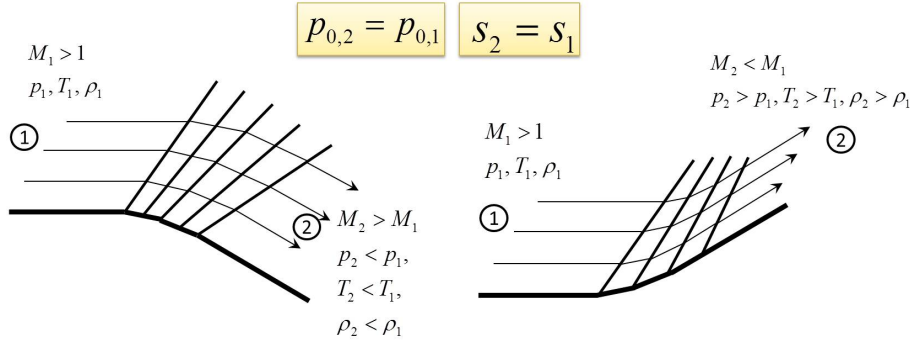


FIGURE 9.3 – Détente et compression isentropiques

9.2 Compression et détente isentropes

9.2.1 Variation infinitésimale à travers une ligne de Mach

Soit Δw la variation infinitésimale de la vitesse à travers un choc infiniment faible et $\Delta\delta$ la déviation de l'écoulement.

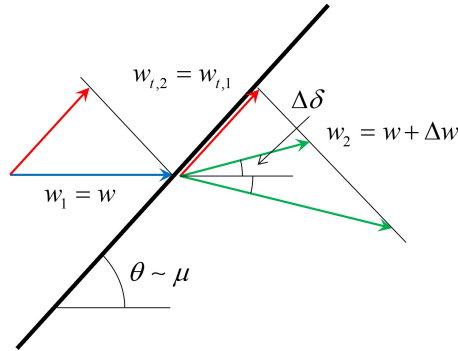


FIGURE 9.4 – Changement cinématique à travers un choc faible

La déviation infinitésimale $\Delta\delta$ positive correspond à une compression isentrope et la déviation infinitésimale négative correspond à une détente isentrope. Nous avons

$$\frac{w_{t,1}}{w_1} = \cos \theta, \quad \frac{w_{t,2}}{w_2} = \cos(\theta - \Delta\delta), \quad (9.13)$$

et puisque $\theta \rightarrow \mu$

$$\frac{w_{t,1}}{w} = \cos \mu, \quad \frac{w_{t,2}}{w + \Delta w} = \cos(\mu - \Delta\delta), \quad (9.14)$$

ce qui donne avec $w_{t,1} = w_{t,2}$

$$\frac{w}{w + \Delta w} = \frac{\cos(\mu - \Delta\delta)}{\cos \mu}. \quad (9.15)$$

Avec $\cos(\mu - \Delta\delta) = \cos\mu \cos\Delta\delta + \sin\mu \sin\Delta\delta$, et en tenant compte du fait que $\Delta\delta$ est petit, nous pouvons écrire $\cos\Delta\delta \simeq 1$ et $\sin\Delta\delta \simeq \Delta\delta$, ce qui nous permet d'aboutir à l'expression

$$\frac{\cos(\mu - \Delta\delta)}{\cos\mu} \simeq 1 + \tan\mu \cdot \Delta\delta. \quad (9.16)$$

A partir des relations pour des ondes de Mach ($\tan\mu = 1/\sqrt{M_1^2 - 1}$), on a alors

$$\frac{\cos(\mu - \Delta\delta)}{\cos\mu} \simeq 1 + \frac{\Delta\delta}{\sqrt{M_1^2 - 1}}. \quad (9.17)$$

Ensuite, avec un développement en série de Taylor au premier ordre

$$\frac{w}{w + \Delta w} = \frac{1}{1 + \frac{\Delta w}{w}} \simeq 1 - \frac{\Delta w}{w}, \quad (9.18)$$

nous obtenons la relation finale

$$1 - \frac{\Delta w}{w} = 1 + \frac{\Delta\delta}{\sqrt{M_1^2 - 1}}, \quad (9.19)$$

puis de manière équivalente

$$\frac{\Delta w}{w} = -\frac{\Delta\delta}{\sqrt{M^2 - 1}}, \quad (9.20)$$

ce qui donne

$$\Delta\delta = -\sqrt{M^2 - 1} \frac{\Delta w}{w}. \quad (9.21)$$

ou, en convertissant sous une forme différentielle

$$d\delta = -\sqrt{M^2 - 1} \frac{dw}{w}. \quad (9.22)$$

Cette relation donne la déviation à travers un choc oblique d'intensité infiniment faible. Elle gouverne alors les écoulements autour de parois courbes avec des changements de pente positif ou négatif. Elle est aussi valable pour les écoulements bidimensionnels supersoniques loin des parois.

9.2.2 Relations de Prandtl-Meyer

Dans le Chapitre sur les écoulements isentropiques, une relation entre dw/w et la variation du nombre de Mach dM/M a été obtenue (Equation 4.23)

$$\frac{dw}{w} = \frac{dM/M}{1 + (\Gamma - 1)M^2}, \quad (9.23)$$

où Γ est la dérivée fondamentale (égale à $(\gamma + 1)/2$ pour un gaz parfait). Ainsi

$$d\delta = -\frac{\sqrt{M^2 - 1}}{1 + (\Gamma - 1)M^2} \frac{dM}{M}. \quad (9.24)$$

Cette relation, valable pour un fluide quelconque, peut être intégrée exactement si Γ est constante. Nous allons nous concentrer sur le cas du gaz parfait pour lequel les relations qui suivent ont été obtenues par Prandtl et Meyer. Ainsi

$$d\delta = -\frac{\sqrt{M^2 - 1}}{1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2} \frac{dM}{M}. \quad (9.25)$$

On définit alors l'angle $\nu(M)$, connu sous le nom de *fonction de Prandtl-Meyer*, comme

$$\nu(M) \equiv \int_1^M \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2} \frac{dM}{M}. \quad (9.26)$$

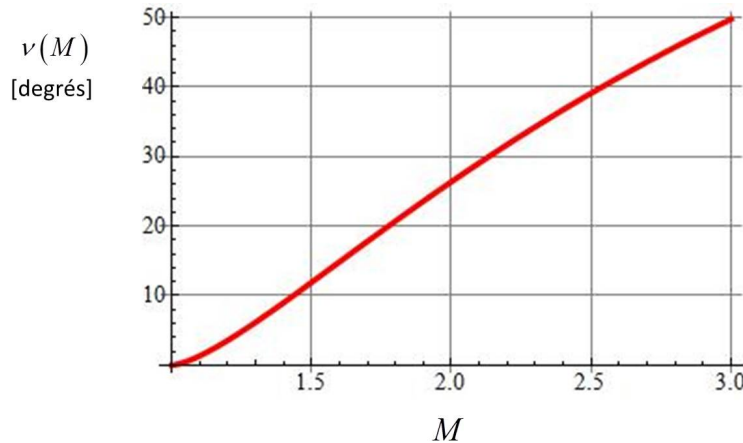


FIGURE 9.5 – Fonction de Prandtl-Meyer

L'intégrale peut être effectuée analytiquement :

$$\nu(M) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arctan \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} (M^2 - 1)} - \arctan \sqrt{M^2 - 1}, \quad (9.27)$$

dont une représentation est donnée à la figure 9.5 (en degrés).

La fonction de Prandtl-Meyer $\nu(M)$ représente physiquement l'angle de déviation que doit subir un écoulement afin d'être détendu d'un nombre de Mach initial $M = 1$ à un nombre de Mach M . Cette fonction est utile pour résoudre les problèmes de compression et détente isentropes. De par sa définition, cette fonction est évidemment liée à l'angle de déviation de l'écoulement (et pas uniquement pour des détentes).

Supposons par exemple que nous ayons un nombre de Mach incident M_1 et l'angle des lignes de courant est δ_1 (par rapport à un axe arbitraire). Pour déterminer M_2 lors d'une déviation $\delta_2 - \delta_1$, nous écrivons

$$\delta = \int_{\delta_1}^{\delta_2} d\delta = - \int_{M_1}^{M_2} \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \frac{dM}{M} = - \int_1^{M_2} (\dots) + \int_1^{M_1} (\dots) = -\nu(M_2) + \nu(M_1). \quad (9.28)$$

Finalement, on obtient la relation simple pour une déviation d'écoulement δ

$$\nu(M_2) = \nu(M_1) - \delta. \quad (9.29)$$

Par simple inversion de la fonction de Prandtl-Meyer (qui est monotone), il est alors possible d'évaluer M_2 . De par la construction de la théorie, on prendra toujours :

- * $\delta > 0$ pour une *compression*,
- * $\delta < 0$ pour une *détente*.

9.3 Ondes de détente

Un exemple de faisceau continu autour d'un changement continu de courbure d'une paroi est illustré sur la figure 9.6.

A l'amont de la déviation, l'écoulement est caractérisé par le nombre Mach M_1 et l'angle de Mach μ_1 . Une ligne de courant quelconque, qui à l'amont est parallèle à la paroi, dévie graduellement pour, à la fin de l'expansion, être parallèle à la paroi aval avec un nombre de Mach M_2 et l'angle de Mach associé μ_2 . Ceci signifie que la première onde de Mach limitant l'expansion (coté amont) est inclinée de l'angle μ_1 par rapport à la paroi amont, tandis que la dernière est inclinée de l'angle μ_2 par rapport à la paroi aval.

Entre les deux lignes de Mach limites, un faisceau de lignes de Mach forme l'expansion dite de Prandtl-Meyer. Les propriétés en aval de la détente se calculent simplement en écrivant la relation de Prandtl-Meyer pour une déviation négative, $\delta < 0$. Nous avons ainsi

$$\nu(M_2) = \nu(M_1) - \delta. \quad (9.30)$$

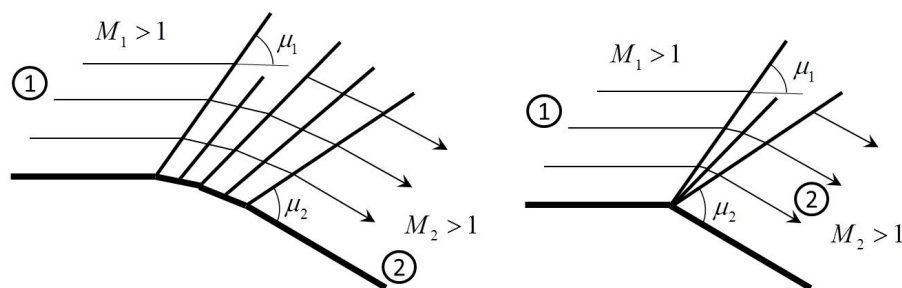


FIGURE 9.6 – Détente isentrope avec courbure progressive et changement brusque.

Toutes les autres grandeurs se calculent avec les relations isentropes.

La même analyse peut être menée avec un changement brusque de direction d'angle $\Delta\delta$ en présence d'un dièdre convexe (Fig. 9.6).

9.3.1 Ondes de compression

Une onde de compression isentrope peut être engendrée par une paroi courbée. Dans certains cas, les lignes de Mach peuvent converger au sein de l'écoulement et une onde de choc oblique peut apparaître (Figure 9.7). En connaissant le nombre de Mach M_1 , il est possible de calculer l'angle de Mach μ_1 et la fonction de Prandtl-Meyer $\nu(M_1)$.

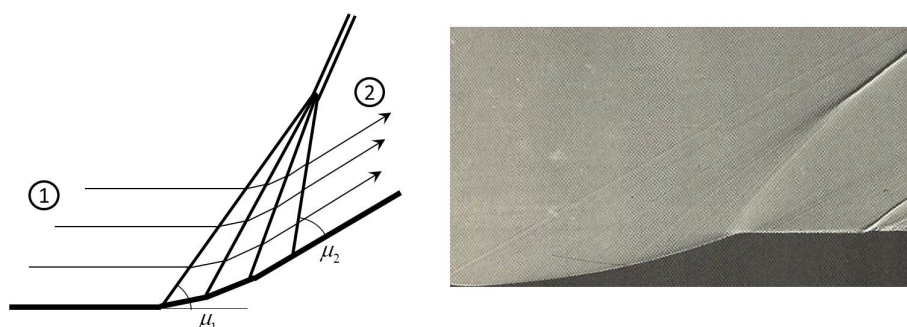


FIGURE 9.7 – Compression isentropique, avec formation de choc par coalescence d'ondes de Mach

Ensuite, comme l'angle total de la déviation δ est connu (et positif), il est possible, à partir de la relation de Prandtl-Meyer pour une compression, d'en déduire la valeur de $\nu(M_2)$ et par suite de M_2 et enfin de l'angle μ_2 . Toutes les autres grandeurs se calculent avec les relations isentropes.

Chapitre 10

Méthode des caractéristiques

On étudie dans ce chapitre les écoulements supersoniques, bidimensionnels, stationnaires, irrotationnels, et isentropes de fluides non visqueux.

10.1 Equations de conservation

10.1.1 Forme générale

Commençons par un rappel des équations de conservation générales du Chapitre 3 exprimées en tenant compte des hypothèses que nous avons admises dans ce chapitre.

Conservation de la masse

Pour un écoulement stationnaire (permanent), l'équation de conservation de masse est donnée par

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (10.1)$$

Conservation de la quantité de mouvement

Pour un fluide non visqueux, l'équation de conservation de la quantité de mouvement est donnée par

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (10.2)$$

En admettant un problème stationnaire, ceci peut s'écrire sous la forme de Lamb

$$\nabla \left(\frac{u^2}{2} \right) - \mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (10.3)$$

où le vecteur tourbillon (vorticité) $\boldsymbol{\omega}$ est défini comme

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \wedge \mathbf{u}. \quad (10.4)$$

En utilisant la relation de Gibbs, l'équation de conservation de quantité de mouvement peut alors se mettre sous la forme de Crocco (Chapitre 3)

$$\nabla h_0 = \mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega} + T \nabla s. \quad (10.5)$$

Conservation de l'énergie

Pour un écoulement permanent et adiabatique d'un fluide non visqueux, on a montré au Chapitre 3 que l'équation de conservation d'énergie prend la forme

$$\mathbf{u} \cdot \nabla h_0 = 0, \quad (10.6)$$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla s = 0. \quad (10.7)$$

Ces deux relations expriment le fait que l'enthalpie totale et l'entropie reste invariants le long de lignes de courants.

Le champ de vitesse \mathbf{u} étant traditionnellement représenté par ses composantes (u_x, u_y) peut maintenant être représenté par son module $u = \|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$ ainsi que son angle ϑ , c'est à dire (u, ϑ) . Les projections du vecteur vitesse \mathbf{u} dans le système de coordonnées (x, y) sont

$$u_x = \|\mathbf{u}\| \cos \vartheta, \quad u_y = \|\mathbf{u}\| \sin \vartheta. \quad (10.8)$$

On a ainsi (u, ϑ) fonction de (ℓ, n) . Il est possible de montrer que le rayon de courbure R de la ligne de courant

$$\frac{1}{R_n} = \frac{1}{\Delta n} \frac{\partial \Delta n}{\partial \ell} = \frac{\partial \vartheta}{\partial n}. \quad (10.9)$$

$$\frac{1}{R_l} = -\frac{1}{\Delta \ell} \frac{\partial \Delta \ell}{\partial n} = \frac{\partial \vartheta}{\partial \ell}. \quad (10.10)$$

Conservation de la masse

Par de simples arguments, la conservation de masse dans ce système de coordonnées s'exprime comme suit

$$\rho u \Delta n = \text{const}. \quad (10.11)$$

Par différentiation logarithmique

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \ell} + \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial \ell} + \frac{1}{\Delta n} \frac{\partial \Delta n}{\partial \ell} = 0, \quad (10.12)$$

et en utilisant Equation 10.9, on obtient

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \ell} + \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial \ell} + \frac{\partial \vartheta}{\partial n} = 0. \quad (10.13)$$

Conservation de la quantité de mouvement selon $\hat{\ell}$

On projette l'équation selon $\hat{\ell}$ en remarquant que le vecteur $\mathbf{u} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{u})$ est perpendiculaire au plan formé par les vecteurs \mathbf{u} et $\nabla \wedge \mathbf{u}$ et donc parallèle à la direction $\hat{\mathbf{n}}$. Soit

$$u \frac{\partial u}{\partial \ell} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \ell} = 0, \quad (10.14)$$

et avec la relation isentropique $dp = a^2 d\rho$

$$u \frac{\partial u}{\partial \ell} + \frac{a^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \ell} = 0. \quad (10.15)$$

L'utilisation de la conservation de masse conduit alors à

$$u \frac{\partial u}{\partial \ell} - a^2 \left[\frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial \ell} + \frac{\partial \vartheta}{\partial n} \right] = 0, \quad (10.16)$$

ce qui donne, en introduisant $M = u/a$,

$$(M^2 - 1) \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial \ell} - \frac{\partial \vartheta}{\partial n} = 0. \quad (10.17)$$

Irrotationalité

Il s'agit ici de trouver une expression de la vorticité en coordonnées (l, n) et d'imposer cette vorticité   être nulle. On utilise le théorème de Stokes liant la circulation autour d'un contour fermé à la vorticité traversant la surface délimitée par le contour

$$\int \Omega dS = \oint u \cdot d\mathbf{x}, \quad (10.18)$$

où le terme Ω représente la composante du vecteur tourbillon perpendiculaire au plan (en 2D, cette composante est la seule qui subsiste). Comme on choisit de travailler avec des écoulements irrotationnels, on posera $\Omega = 0$. En faisant utilisation du schéma de la Figure 10.1

$$\int \Omega dS \sim \Omega \Delta \ell \Delta n, \quad (10.19)$$

$$\oint u \cdot d\mathbf{x} \sim u \Delta \ell - \left(u + \frac{\partial u}{\partial n} \Delta n \right) \left(\Delta \ell + \frac{\partial \Delta \ell}{\partial n} \Delta n \right), \quad (10.20)$$

en négligeant les termes de deuxième ordre. On remarquera que l'intégration selon n ne contribue pas car la vitesse est perpendiculaire à n . En utilisant Equation 10.10, on obtient

$$\Omega = -\frac{\partial u}{\partial n} + u \frac{\partial \vartheta}{\partial \ell}. \quad (10.21)$$

Un écoulement plan irrotationnel nous fournit donc la relation

$$-\frac{\partial u}{\partial n} + u \frac{\partial \vartheta}{\partial \ell} = 0. \quad (10.22)$$

Conservation de la quantité de mouvement selon n et conservation d'énergie

Nous allons voir que la relation de conservation de quantité de mouvement selon n et la relation de conservation d'énergie sont essentiellement identique comme l'écoulement est homentropique, irrotationnel, et à enthalpie totale uniforme.

En coordonnées (l, n) , la conservation de quantité de mouvement selon n donne

$$\frac{u^2}{R_l} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} = 0, \quad (10.23)$$

soit

$$u^2 \frac{\partial \vartheta}{\partial \ell} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} = 0. \quad (10.24)$$

La relation de Gibbs $Tds = dh - vdp$ peut être écrite en fonction de l'enthalpie totale $Tds = dh_0 - udu - vdp$, donnant ainsi selon ℓ et selon n

$$T \frac{\partial s}{\partial \ell} = \frac{\partial h_0}{\partial \ell} - \left(u \frac{\partial u}{\partial \ell} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \ell} \right), \quad (10.25)$$

$$T \frac{\partial s}{\partial n} = \frac{\partial h_0}{\partial n} - \left(u \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \right). \quad (10.26)$$

Pour un écoulement à entropie et à enthalpie totale constante le long d'une ligne de courant, on a alors $\partial s / \partial \ell = 0$ et $\partial h_0 / \partial \ell = 0$, et la première relation (Equation 10.25) nous redonne l'équation de conservation de quantité de mouvement selon s , Equation 10.14.

Dans la deuxième relation (Equation 10.26), on utilise la conservation de quantité de mouvement selon n , Equation 10.24, pour obtenir

$$T \frac{\partial s}{\partial n} = \frac{\partial h_0}{\partial n} - \left(u \frac{\partial u}{\partial n} - u^2 \frac{\partial \vartheta}{\partial \ell} \right), \quad (10.27)$$

soit

$$T \frac{\partial s}{\partial n} = \frac{\partial h_0}{\partial n} + u\Omega. \quad (10.28)$$

Cette relation est l'équation de Crocco en coordonnées naturelles. Elle relie la vorticité Ω à la variation d'entropie et la variation d'enthalpie totale perpendiculairement aux lignes de courant. Si deux de ces paramètres sont nuls, le troisième l'est aussi. Ainsi, un écoulement homentropique et à enthalpie totale uniforme est obligatoirement irrotationnel.

10.2.2 Caractéristiques de l'écoulement

Pour un écoulement homentropique et à enthalpie totale uniforme (donc irrotationnel), deux équations suffisent pour décrire l'écoulement. On choisit la conservation de quantité de mouvement selon ℓ ainsi que l'équation d'irrotationalité

$$-\frac{\partial u}{\partial n} + u \frac{\partial \vartheta}{\partial \ell} = 0, \quad (10.29)$$

$$(M^2 - 1) \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial \ell} - \frac{\partial \vartheta}{\partial n} = 0. \quad (10.30)$$

En introduisant l'angle de Mach μ tel que

$$\tan \mu = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}}, \quad (10.31)$$

on a alors

$$-\tan \mu \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{u} \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial \vartheta}{\partial \ell} = 0, \quad (10.32)$$

$$\frac{\sqrt{M^2 - 1}}{u} \frac{\partial u}{\partial \ell} - \tan \mu \frac{\partial \vartheta}{\partial n} = 0. \quad (10.33)$$

Il est possible à présent de rappeler la fonction de Prandtl-Meyer écrite en fonction de la vitesse de l'écoulement, Equation 9.22, écrite en fonction de la vitesse u au lieu de la vitesse w (l'écoulement étant isentropique, il n'y a pas d'ondes de chocs, et la notation w pour la vitesse n'est pas obligatoire)

$$d\nu = \sqrt{M^2 - 1} \frac{du}{u}. \quad (10.34)$$

Ainsi,

$$-\tan \mu \frac{\partial \nu}{\partial n} + \frac{\partial \vartheta}{\partial \ell} = 0, \quad (10.35)$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial \ell} - \tan \mu \frac{\partial \vartheta}{\partial n} = 0. \quad (10.36)$$

En les additionnant et en les soustrayant, on obtient les *équations caractéristiques* suivantes

$$\left(\frac{\partial}{\partial \ell} + \tan \mu \frac{\partial}{\partial n} \right) (\nu - \vartheta) = 0, \quad (10.37)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \ell} - \tan \mu \frac{\partial}{\partial n} \right) (\nu + \vartheta) = 0. \quad (10.38)$$

Ces équations peuvent être interprétées comme suit. Soit les deux ondes de Mach émanant d'un point de la ligne de courant (Figure 10.2), que l'on dénote m^- pour celle à *gauche* dans le sens de l'écoulement (ou à babord) et m^+ pour celle à *droite* (à tribord). Soit dm^- l'incrément en longueur le long de la ligne de Mach m^- . La dérivée d'une fonction $F(l, n)$ le long de cette ligne de Mach peut s'écrire

$$\frac{dF}{dm^-} = \frac{\partial F}{\partial \ell} \frac{\partial \ell}{m^-} + \frac{\partial F}{\partial n} \frac{\partial n}{m^-}. \quad (10.39)$$

La géométrie de la Figure 10.3 donne $dl/dm^- = \cos \mu$ et $dn/dm^- = \sin \mu$. Ainsi

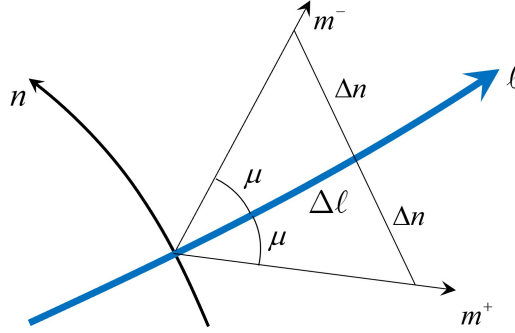
$$\frac{dF}{dm^-} = \cos \mu \left(\frac{\partial F}{\partial \ell} + \tan \mu \frac{\partial F}{\partial n} \right). \quad (10.40)$$

De même on trouve

$$\frac{dF}{dm^+} = \cos \mu \left(\frac{\partial F}{\partial \ell} - \tan \mu \frac{\partial F}{\partial n} \right). \quad (10.41)$$

Ainsi, les équations caractéristiques peuvent s'écrire

$$\frac{d}{dm^-} (\nu - \vartheta) = 0, \quad (10.42)$$

FIGURE 10.2 – Caractéristiques (ondes de Mach) m^+ and m^-

$$\frac{d}{dm^+}(\nu + \vartheta) = 0. \quad (10.43)$$

Les ondes de Mach m^- et m^+ sont les *caractéristiques* de l'écoulement. On arrive à la conclusion

$$\nu - \vartheta = \text{const} = G \text{ le long de la caractéristique } m^-, \quad (10.44)$$

$$\nu + \vartheta = \text{const} = D \text{ le long de la caractéristique } m^+. \quad (10.45)$$

que l'on appelle les relations de compatibilité entre ϑ et ν . Les constantes G (pour *gauche*) et D (pour *droite*) sont dénommées les *invariants de Riemann*.

Nous allons voir comment ce résultat peut être utilisé pour évaluer un champ de vitesse bi-dimensionnel, homentropique, et irrotationnel.

Une remarque concerne la similitude avec le résultat obtenu dans le Chapitre précédent pour les écoulements de Prandtl-Meyer. Nous avons obtenu le résultat que la déviation infinitésimale $d\delta$ à travers une onde infinitésimale (onde de Mach) était liée à la fonction Prandtl-Meyer selon $d(\nu + \delta) = 0$. Ici, nous avons obtenu un résultat liant l'angle de l'écoulement et la fonction de Prandtl-Meyer *le long* des caractéristiques (ondes de Mach), à savoir $d(\nu + \vartheta) = 0$ selon m^+ et $d(\nu - \vartheta) = 0$ selon m^- . Nous comprendrons le lien entre les deux résultats un peu plus loin.

Nous avons ainsi introduit un nouveau système de coordonnées m^+ et m^- . Dans le plan (x, y) , nous obtenons par cette transformation deux familles de courbes $m^+(x, y) = \text{const}$ et $m^-(x, y) = \text{const}$ correspondant au réseau d'ondes de Mach de l'écoulement, qui prennent ainsi le rôle d'un nouveau réseau de coordonnées.

10.3 Méthode de calcul des caractéristiques

Pour le calcul d'un écoulement bidimensionnel supersonique, la méthode est donnée sur la Figure 10.3.

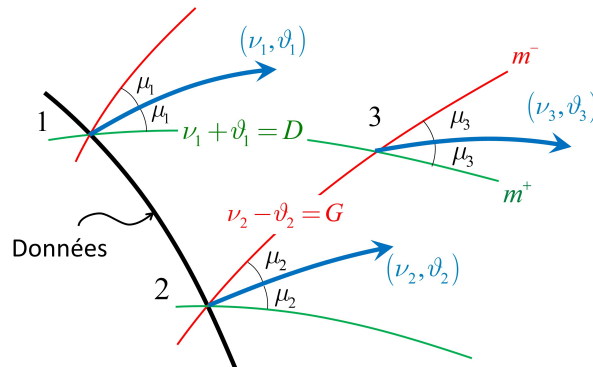


FIGURE 10.3 – Méthode des caractéristiques

Les données (ou conditions de bord), tels que ϑ et ν , sont supposées connues dans le plan (x, y) le long d'une courbe entre deux points **1** et **2** (qui est choisie comme n'étant pas une onde de Mach ou caractéristique). La connaissance de ν et ϑ équivaut à la connaissance du nombre de Mach M , de la vitesse u , de l'angle de Mach μ , ou tout autre variable (thermodynamique par exemple). Si l'on trace la caractéristique m^+ émanant du point **1**, alors l'on sait que le long de cette caractéristique l'invariant de Riemann est $D = D_1$ est donnée par

$$D = D_1 = \nu_2 - \vartheta_2. \quad (10.46)$$

De même l'on trace la caractéristique m^- émanant du point **2**, et le long de cette caractéristique l'invariant de Riemann est $G = G_2$ est donnée par

$$D_3 = D_1, \quad (10.47)$$

$$G_3 = G_2, \quad (10.48)$$

donnant ainsi

$$\nu_3 + \vartheta_3 = \nu_1 + \vartheta_1. \quad (10.49)$$

$$\nu_3 - \vartheta_3 = \nu_2 - \vartheta_2, \quad (10.50)$$

La solution se trouvent aisément à partir de ces deux relations

$$\nu_3 = \frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2) + \frac{1}{2}(\vartheta_1 - \vartheta_2), \quad (10.51)$$

$$\vartheta_3 = \frac{1}{2}(\nu_1 - \nu_2) + \frac{1}{2}(\vartheta_1 + \vartheta_2). \quad (10.52)$$

ou, d'une manière générale

$$\nu = \frac{1}{2}(D + G), \quad (10.53)$$

$$\vartheta = \frac{1}{2}(D - G). \quad (10.54)$$

Ainsi, la solution au point **3** semble se trouver d'une manière simple et élégante. Il reste cependant des inconnues dans ce problème : les caractéristiques elles mêmes.

La méthodologie de résolution se fait *numériquement* par étapes intermédiaires, en subdivisant la région **123** en un maillage de segments *droits* correspondant aux ondes de Mach locales (Figure 10.4. Par exemple, le point **5** est rejoint par des ondes de Mach droites émanant des points **1** et **4**. Les conditions en **5** sont déterminées à partir des données en **1** et **4**. Le point **7** est déterminé d'une manière similaire, et le point **8** se trouve à partir des points **5** et **7**. Ainsi, le calcul procède en partant en aval de la ligne de données entre les points **1** et **2**, donc vers la zone d'influence. Ceci est une particularité des écoulements compressibles (supersoniques), contrairement aux écoulements incompressibles pour lesquels les données doivent être spécifiées sur le pourtour de la région.

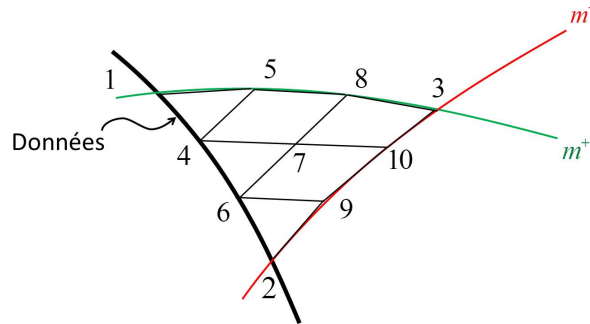


FIGURE 10.4 – Réseau de caractéristiques *droites* pour l'évaluation

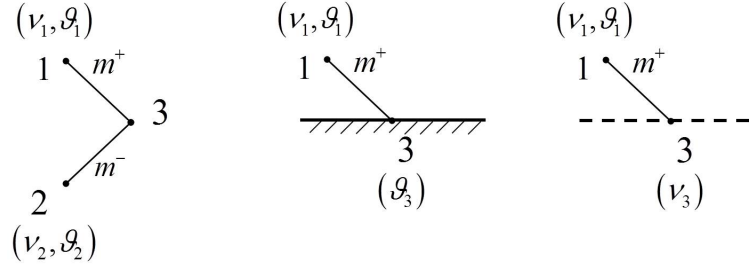


FIGURE 10.5 – Données pour l'évaluation en un point **3**, de gauche à droite : point intérieur, paroi, surface libre

Ecoulements intérieurs Pour un point intérieur à l'écoulement, nous avons vu comment les caractéristiques D et G permettaient de trouver des propriétés pour d'autres points en aval. La situation est présentée sur la Figure 10.5.

Pour des données en deux points **1** et **2**, les données en **3** sont trouvées à partir des caractéristiques D_1 et G_2 selon

$$\nu_3 = \frac{1}{2}(D_1 + G_2), \quad (10.55)$$

$$\vartheta_3 = \frac{1}{2}(D_1 - G_2). \quad (10.56)$$

Ecoulements avec paroi Si le point **3** se trouve sur une paroi, la direction de l'écoulement en ce point est donnée (ϑ_3). Ainsi, l'on a bien deux paramètres connus, D_1 et ϑ_3 , ce qui permet d'évaluer ν_3 selon

$$\nu_3 = \nu_1 + \vartheta_1 - \vartheta_3 = D_1 - \vartheta_3. \quad (10.57)$$

Ecoulements avec surface libre Si le point **3** se trouve sur une surface libre (surface de cisaillement ou de contact), la pression est *a priori* connue en ce point, et donc la fonction de Prandtl-Meyer ν_3 . Ainsi, l'on a encore bien deux paramètres connus, D_1 et ν_3 , ce qui permet d'évaluer ϑ_3 selon

$$\vartheta_3 = \nu_1 + \vartheta_1 - \nu_3 = D_1 - \nu_3. \quad (10.58)$$

Ecoulement supersonique dans une conduite bidimensionnelle La procédure que l'on vient de décrire permet ainsi d'évaluer l'écoulement dans une conduite supersonique bi-dimensionnelle (et, en particulier, on n'a plus besoin de faire l'hypothèse que l'écoulement est quasi-unidimensionnel comme dans les Chapitres précédents).

La Figure 10.6 présente la méthodologie. Les données sont distribuées sur une ligne **bc** ainsi que sur les parois **ahq** et **dlt**. En se basant sur les différents cas du paragraphe précédent, il est possible d'évaluer les données sur tous les noeuds du maillage intérieur.

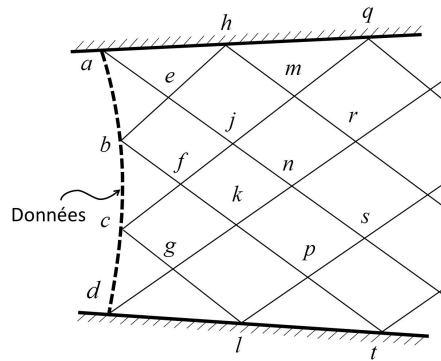


FIGURE 10.6 – Evaluation de l'écoulement dans une tuyère bidimensionnelle supersonique

Régions non simples Comme les caractéristiques, rappelons-le, sont identiques aux ondes de Mach, la solution de l'écoulement dans une tuyère supersonique dans le paragraphe précédent représente également la solution au problème de réflexions de faisceau de Prandtl-Meyer sur une paroi ou l'interaction de faisceaux de Prandtl-Meyer à l'intérieur d'un écoulement. Le réseau de caractéristiques sous cette forme générale forme une région qu'on appelle *non-simple* (Figure 10.7). Elle se résout par la méthode du paragraphe précédent.

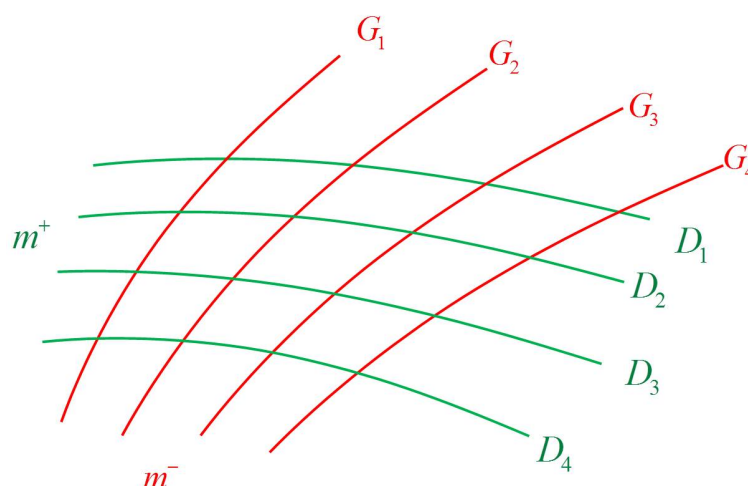


FIGURE 10.7 – Région non simple

Régions uniformes Dans un écoulement *uniforme*, l'écoulement est unidirectionnel (donc avec des valeurs de ϑ constantes) et à nombre de Mach constant (donc avec des valeurs de ν constantes). De ce fait, les caractéristiques (et ondes de Mach) m^+ et m^- sont rectilignes (Figure 10.8). Dans ce cas, elles sont généralement omises des schémas.

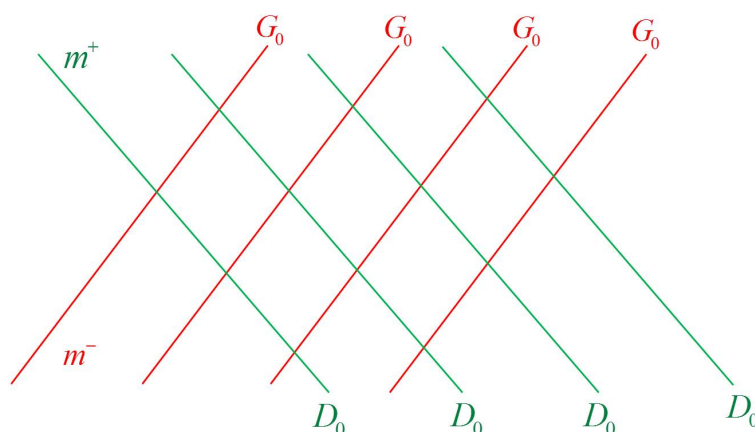


FIGURE 10.8 – Région uniforme

Régions simples Dans une compression ou détente de Prandtl-Meyer, le faisceau d'ondes est rectiligne : c'est celui qui a été tracé dans le Chapitre précédent pour les écoulements de Prandtl-Meyer (il peut s'agir de caractéristiques m^+ ou m^-). Or, nous savons maintenant qu'il existe un deuxième réseau de caractéristiques correspondant au faisceau de Prandtl-Meyer (Figure 10.9). Ce deuxième réseau n'est pas composé de caractéristiques rectilignes. On parle alors de région *simple* de caractéristiques. On remarquera que, comme le nombre de Mach (et donc ν) et la direction de l'écoulement (donc ϑ) sont individuellement constants le long d'une ligne du faisceau de Prandtl-Meyer (comme on l'a vu dans

le Chapitre précédent), on en conclut que l'invariant de Riemann sur le deuxième réseau a la même valeur sur chaque caractéristique. En effet, si on considère que le faisceau de Prandtl-Meyer correspond à des caractéristiques droites m^- (par exemple), alors toutes les caractéristiques m^+ intersectant une caractéristique (ou onde de Mach) particulière m_0^- (sur laquelle $\nu = \text{const} = \nu_0$ et $\vartheta = \text{const} = \vartheta_0$) auront toutes pour valeur $D = \nu_0 + \vartheta_0$. Ainsi, tout le réseau m^+ a la même valeur pour l'invariant de Riemann $D = D_0$. En particulier, pour n'importe quelle caractéristique m^+ intersectant une caractéristique m_1^- particulière, on aura

$$\nu_1 + \vartheta_1 = \nu_0 + \vartheta_0, \quad (10.59)$$

c'est à dire

$$\nu_1 - \nu_0 = -(\vartheta_1 - \vartheta_0). \quad (10.60)$$

Cette relation n'est rien d'autre que la relation de Prandtl-Meyer pour une ligne de courant traversant un faisceau de Prandtl-Meyer avec la déviation $\delta = \vartheta_1 - \vartheta_0$.

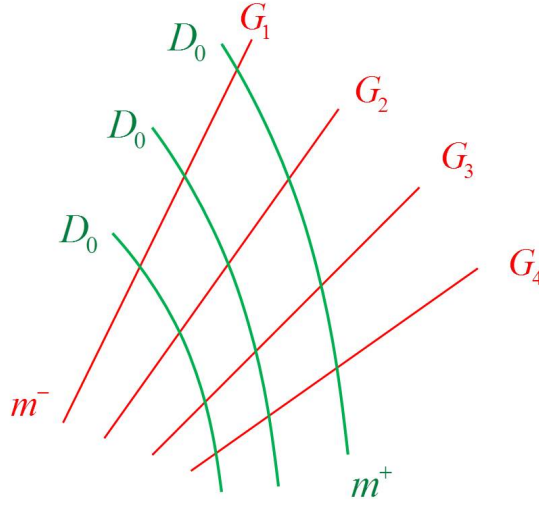


FIGURE 10.9 – Région simple

Bibliographie

- L. Borel and D. Favrat. *Thermodynamique et énergétique*, volume I. PPUR, Lausanne, 2005.
- C. Borgnakke and R. E. Sonntag. *Fundamentals of Thermodynamics*. Wiley, 2019.
- B. Carroll. On the Use of Jacobians in Thermodynamics. *Journal of Chemical Education*, 42 :218–221, 1965. doi: doi/10.1021/ed042p218.
- Y. A. Cengel, M. A. Boles, and Mehmet Kanoglu. *Thermodynamics : An Engineering Approach*. McGraw Hill, 2019.
- F.H. Crawford. Jacobian Methods in Thermodynamics. *American Journal of Physics*, 17 :1–5, 1949. doi: <https://doi.org/10.1119/1.1989489>.
- M. Van Dyke. *An Album of Fluid Motion*. The Parabolic Press, 1982.
- L. Landau and E. M. Lifshitz. *Fluid Mechanics*. Butterworth Heinemann, Oxford, 1997.
- H. W. Liepmann and A. Roshko. *Elements of Gasdynamics*. John Wiley & Sons, New York, 1957.
- H. Margenau and G.M. Murphy. *The Mathematics of Physics and Chemistry*. D. Van Nostrand Company, 1956.
- M. J. Moran, H. N. Shapiro, D. D. Boettner, and M. B. Bailey. *Fundamentals of Engineering Thermodynamics*. Wiley, 2019.
- A. H. Shapiro. *The dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow*, volume I and II. Ronald Press Co., New York, 1953.
- A. N. Shaw. The Derivation of Thermodynamical Relations for a Simple System. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London – Series A – Mathematical and Physical Sciences*, 234 :299–328, 1935. doi: doi/10.1021/ed042p218.
- T.K. Sherwood and C.E. Reed. *Applied Mathematics in Chemical Engineering*. McGraw-Hill, 1939.
- Y. Sugiyama, M. Fukui, M. Kikuchi, K. Hasebe, A. Nakayama, K. Nishinari, S. Tadaki, and S. Yukawa. Traffic jams without bottlenecks—experimental evidence for the physical mechanism of the formation of a jam. *New Journal of Physics*, 10, 2008. doi: 10.1088/1367-2630/10/3/033001.
- P. A. Thompson. *Compressible-fluid dynamics*. McGraw-Hill, New York, 1972.
- M. Tribus. *Thermostatistics and Thermodynamics*. D. Van Nostrand Company, 1961.
- W. G. Vincenti and C. H. Kruger. *Introduction to Physical Gas Dynamics*. John Wiley and Sons, 1967.

Annexe A

Vector and Tensor Identities

A.1 Operations with vectors

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \equiv a_i b_i \quad (\text{A.1})$$

$$[\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}]_i \equiv \epsilon_{ijk} a_j b_k \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{a} \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} a_i \quad (\text{A.3})$$

$$[\nabla \wedge \mathbf{a}]_i \equiv \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} a_k \quad (\text{A.4})$$

$$[\nabla \alpha]_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} \alpha \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a}) \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \quad (\text{A.8})$$

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \quad (\text{A.9})$$

$$\nabla \cdot (\alpha \mathbf{a}) = \nabla \alpha \cdot \mathbf{a} + \alpha \nabla \cdot \mathbf{a} \quad (\text{A.10})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{a}) = 0 \quad (\text{A.11})$$

$$\nabla \wedge (\nabla \alpha) = 0 \quad (\text{A.12})$$

$$\nabla \wedge (\alpha \mathbf{a}) = (\nabla \alpha) \wedge \mathbf{a} + \alpha \nabla \wedge \mathbf{a} \quad (\text{A.13})$$

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{a}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla \cdot \nabla \mathbf{a} \quad (\text{A.14})$$

$$\nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (\nabla \mathbf{b}) + \mathbf{b} \cdot (\nabla \mathbf{a}) + \mathbf{a} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{b}) + \mathbf{b} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{a}) \quad (\text{A.15})$$

$$\nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) + \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a}) + (\mathbf{a} \wedge \nabla) \wedge \mathbf{b} + (\mathbf{b} \wedge \nabla) \wedge \mathbf{a} \quad (\text{A.16})$$

$$\nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\nabla \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} + (\nabla \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} \quad (\text{A.17})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = (\nabla \wedge \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{b}) \quad (\text{A.18})$$

$$\nabla \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{b} \cdot (\nabla \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \mathbf{b}) \quad (\text{A.19})$$

$$\nabla \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{a} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \wedge \nabla) \wedge \mathbf{b} - \mathbf{b} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{a}) + (\mathbf{b} \wedge \nabla) \wedge \mathbf{a} \quad (\text{A.20})$$

$$\mathbf{a} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \wedge \nabla) \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \mathbf{b}) \quad (\text{A.21})$$

$$\nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = 2\mathbf{a} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{a}) + 2\mathbf{a} \cdot (\nabla \mathbf{a}) \quad (\text{A.22})$$

$$\nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = 2(\nabla \mathbf{a}) \cdot \mathbf{a} \quad (\text{A.23})$$

$$(\nabla \mathbf{a}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot (\nabla \mathbf{a}) + \mathbf{a} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{a}) \quad (\text{A.24})$$

A.2 Operations with tensors

$$[\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}]_i \equiv A_{ij} a_j \quad (\text{A.25})$$

$$[\mathbf{a} \cdot \mathbf{A}]_i \equiv a_j A_{ji} \quad (\text{A.26})$$

$$A_{ij}^T \equiv A_{ji} \quad (\text{A.27})$$

$$[\mathbf{A} : \mathbf{B}]_{ij} \equiv A_{ij} B_{ij} \quad (\text{A.28})$$

$$[\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}]_{ij} \equiv A_{ik} B_{kj} \quad (\text{A.29})$$

$$[\nabla \cdot \mathbf{A}]_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_j} A_{ji} \quad (\text{A.30})$$

$$[\nabla \wedge \mathbf{A}]_{ij} \equiv \epsilon_{ilm} \frac{\partial}{\partial x_l} A_{mj} \quad (\text{A.31})$$

$$[\text{dual } \mathbf{A}]_i \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} A_{jk} \quad (\text{A.32})$$

$$\text{Tr } \mathbf{A} = A_{ii} \quad (\text{A.33})$$

$$\text{Det } \mathbf{A} = \frac{1}{6} \epsilon_{ijk} \epsilon_{pqr} A_{ip} A_{jq} A_{kr} \quad (\text{A.34})$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T \quad (\text{A.35})$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{A}^T \quad (\text{A.36})$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{a} \quad (\text{A.37})$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{A} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{B}) \quad (\text{A.38})$$

$$\nabla \cdot (\alpha \mathbf{A}) = \nabla \alpha \cdot \mathbf{A} + \alpha \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (\text{A.39})$$

$$\nabla \wedge (\alpha \mathbf{A}) = (\nabla \alpha) \wedge \mathbf{A} + \alpha \nabla \wedge \mathbf{A} \quad (\text{A.40})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}) = (\nabla \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{a} + \mathbf{A} : (\nabla \mathbf{a}) \quad (\text{A.41})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{A}) = \text{Tr}(\nabla \mathbf{a} \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{a} \cdot \nabla \cdot \mathbf{A}^T \quad (\text{A.42})$$

$$\nabla \wedge (\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}) = (\nabla \wedge \mathbf{A}) \cdot \mathbf{a} - 2 \text{dual}[\mathbf{A} \cdot (\nabla \mathbf{a})^T] \quad (\text{A.43})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A}) = 0 \quad (\text{A.44})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A})^T = \nabla \wedge \nabla \cdot (\mathbf{A}^T) \quad (\text{A.45})$$

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \cdot \nabla \mathbf{A} \quad (\text{A.46})$$

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \mathbf{B} : \mathbf{A} \quad (\text{A.47})$$

$$\mathbf{A} : \mathbf{B}^T = \mathbf{A}^T : \mathbf{B} \quad (\text{A.48})$$

$$\mathbf{A} : \mathbf{B}^T = \text{Tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (\text{A.49})$$

$$\text{Tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \text{Tr}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \quad (\text{A.50})$$

$$\text{dual } \mathbf{A}^T = -\text{dual } \mathbf{A} \quad (\text{A.51})$$

$$\nabla \wedge \text{dual } \mathbf{A} = \frac{1}{2} \nabla \cdot (\mathbf{A}^T - \mathbf{A}) \quad (\text{A.52})$$

$$\text{dual } \nabla \wedge \mathbf{A} = \frac{1}{2} (\nabla \cdot \mathbf{A}^T - \nabla \text{Tr } \mathbf{A}) \quad (\text{A.53})$$

$$\nabla \cdot \text{dual } \mathbf{A} = \frac{1}{2} \text{Tr } \nabla \wedge \mathbf{A} \quad (\text{A.54})$$

$$\text{dual } \mathbf{A} \cdot \text{dual } \mathbf{B} = \frac{1}{4} \mathbf{A} : (\mathbf{B} - \mathbf{B}^T) \quad (\text{A.55})$$

$$\text{dual } \mathbf{A} \cdot \text{dual } \mathbf{B} = \frac{1}{4} (\mathbf{A} - \mathbf{A}^T) : \mathbf{B} \quad (\text{A.56})$$

A.3 Operations with anti-symmetric tensors \mathbf{W}

$$W_{ij} \equiv -W_{ji} \quad (\text{A.57})$$

$$\text{Tr } \mathbf{W} = 0 \quad (\text{A.58})$$

$$\mathbf{W} \cdot \mathbf{a} = -(\text{dual } \mathbf{W}) \wedge \mathbf{a} \quad (\text{A.59})$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{W} = -\mathbf{a} \wedge (\text{dual } \mathbf{W}) \quad (\text{A.60})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{W} = -\nabla \wedge (\text{dual } \mathbf{W}) \quad (\text{A.61})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{W}^T = \nabla \wedge (\text{dual } \mathbf{W}) \quad (\text{A.62})$$

$$\text{dual } \nabla \wedge \mathbf{W} = -\frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{W} \quad (\text{A.63})$$

$$\mathbf{W} : \nabla \mathbf{a} = (\text{dual } \mathbf{W}) \cdot \nabla \wedge \mathbf{a} \quad (\text{A.64})$$

$$\begin{cases} \mathbf{W}_{\mathbf{a}} \equiv \text{dual }^{-1} \mathbf{a} \\ [\mathbf{W}_{\mathbf{a}}]_{ij} \equiv \epsilon_{ijk} a_k \end{cases} \quad (\text{A.65})$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{W}_{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b} \quad (\text{A.66})$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{W}_{\mathbf{b}} \quad (\text{A.67})$$

$$\nabla \wedge \mathbf{a} = -\nabla \cdot \mathbf{W}_{\mathbf{a}} \quad (\text{A.68})$$

$$\nabla \wedge \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{W}_{\mathbf{a}}^T \quad (\text{A.69})$$

$$\mathbf{a} \cdot \nabla \wedge \mathbf{b} = \mathbf{W}_{\mathbf{a}} : \nabla \mathbf{b} \quad (\text{A.70})$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{A} = -\mathbf{W}_{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{A} \quad (\text{A.71})$$

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{a} = -\mathbf{A} \cdot \mathbf{W}_{\mathbf{a}} \quad (\text{A.72})$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{A}) = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot \mathbf{A} \quad (\text{A.73})$$

$$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \quad (\text{A.74})$$

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{A}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \wedge (\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}) \quad (\text{A.75})$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{A} \wedge \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{A}) \wedge \mathbf{b} \quad (\text{A.76})$$

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{A} \wedge \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{A}) \wedge \mathbf{b} \quad (\text{A.77})$$

$$\nabla \wedge (\mathbf{A} \wedge \mathbf{a}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{a}) + (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\nabla \cdot \mathbf{A}^T) \mathbf{a} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{a} \quad (\text{A.78})$$

A.4 Operations with symmetric tensors \mathbf{S}

$$S_{ij} = S_{ji} \quad (\text{A.79})$$

$$\text{dual } \mathbf{S} = 0 \quad (\text{A.80})$$

$$\text{Tr } \nabla \wedge \mathbf{S} = 0 \quad (\text{A.81})$$

A.5 Operations with dyadics

$$[\mathbf{ab}]_{ij} = a_i b_j \quad (\text{A.82})$$

$$(\mathbf{ab}) \cdot (\mathbf{cd}) = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{d} \quad (\text{A.83})$$

$$(\mathbf{ab}) \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \quad (\text{A.84})$$

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{bc}) = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\mathbf{c} \quad (\text{A.85})$$

$$(\mathbf{ab}) \wedge (\mathbf{cd}) = \mathbf{a}(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})\mathbf{d} \quad (\text{A.86})$$

$$\mathbf{c} \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{ba} - \mathbf{ab}) \quad (\text{A.87})$$

$$\mathbf{c} \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = (\mathbf{ab} - \mathbf{ba}) \cdot \mathbf{c} \quad (\text{A.88})$$

$$\text{dual}(\mathbf{ab}) = \frac{1}{2} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \quad (\text{A.89})$$

$$\text{dual}(\mathbf{ab} + \mathbf{ba}) = 0 \quad (\text{A.90})$$

$$\text{dual}(\mathbf{ab} - \mathbf{ba}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \quad (\text{A.91})$$

$$\mathbf{W}_a \cdot \mathbf{W}_b = \mathbf{ba} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{I} \quad (\text{A.92})$$

$$[\nabla \mathbf{a}]_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_i} a_j \quad (\text{A.93})$$

$$\mathbf{a} \cdot (\nabla \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} \quad (\text{A.94})$$

$$\nabla(\alpha \mathbf{a}) = (\nabla \alpha) \mathbf{a} + \alpha \nabla \mathbf{a} \quad (\text{A.95})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \mathbf{a})^T = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) \quad (\text{A.96})$$

$$\nabla \wedge (\nabla \mathbf{a}) = 0 \quad (\text{A.97})$$

$$\nabla \wedge (\nabla \mathbf{a})^T = (\nabla \nabla \wedge \mathbf{a})^T \quad (\text{A.98})$$

$$\nabla(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = (\nabla \mathbf{a}) \wedge \mathbf{b} - (\nabla \mathbf{b}) \wedge \mathbf{a} \quad (\text{A.99})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{ab}) = (\nabla \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} + (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} \quad (\text{A.100})$$

$$\nabla \wedge (\mathbf{ab}) = (\nabla \wedge \mathbf{a})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \wedge \nabla) \mathbf{b} \quad (\text{A.101})$$

$$[(\nabla \mathbf{a})^T - \nabla \mathbf{a}] \cdot \mathbf{b} = (\nabla \wedge \mathbf{a}) \wedge \mathbf{b} \quad (\text{A.102})$$

$$\nabla \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \nabla \cdot (\mathbf{ba} - \mathbf{ab}) \quad (\text{A.103})$$

A.6 Operations with the unit tensor **I**

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{a} \quad (\text{A.104})$$

$$\mathbf{I} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{I} = -\mathbf{W}_a \quad (\text{A.105})$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (\mathbf{I} \wedge \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} \quad (\text{A.106})$$

$$(\mathbf{I} \wedge \mathbf{a})^2 = \mathbf{aa} - \mathbf{I} \quad (\text{A.107})$$

$$(\mathbf{I} \wedge \mathbf{a})^3 = -\mathbf{I} \wedge \mathbf{a} \quad (\text{A.108})$$

$$(\mathbf{I} \wedge \mathbf{a})^4 = \mathbf{I} - \mathbf{aa} \quad (\text{A.109})$$

$$(\mathbf{I} \wedge \mathbf{a})^5 = \mathbf{I} \wedge \mathbf{a} \quad (\text{A.110})$$

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{I} = \mathbf{ba} - \mathbf{ab} \quad (\text{A.111})$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (\mathbf{I} \wedge \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} \quad (\text{A.112})$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{I} \wedge \mathbf{b}) \quad (\text{A.113})$$

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{A} \quad (\text{A.114})$$

$$\mathbf{I} : \nabla \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a} \quad (\text{A.115})$$

A.7 Operations with vectors, dyadics, and tensors that use the position vector

A.7.1 Operations with one position vector

$$\nabla \cdot \mathbf{x} = \mathcal{N} \quad (\text{A.116})$$

$$\nabla \wedge \mathbf{x} = 0 \quad (\text{A.117})$$

$$\nabla \mathbf{x} = \mathbf{I} \quad (\text{A.118})$$

$$\nabla \cdot (\alpha \mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \nabla \alpha + \mathcal{N} \alpha \quad (\text{A.119})$$

$$\nabla (\alpha \mathbf{x}) = (\nabla \alpha) \mathbf{x} + \alpha \mathbf{I} \quad (\text{A.120})$$

$$\nabla^2 (\mathbf{x}) = 0 \quad (\text{A.121})$$

$$\nabla^2 (\alpha \mathbf{x}) = \mathbf{x} (\nabla^2 \alpha) + 2 \nabla \alpha \quad (\text{A.122})$$

A.7.2 Operations with one arbitrary vector and one position vector

$$\nabla \cdot (\mathbf{x} \wedge \mathbf{a}) = -\mathbf{x} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{a}) \quad (\text{A.123})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{a}) \quad (\text{A.124})$$

$$\nabla \wedge (\alpha \mathbf{x}) = (\nabla \alpha) \wedge \mathbf{x} \quad (\text{A.125})$$

$$\nabla \wedge (\mathbf{x} \wedge \mathbf{a}) = \mathbf{x} (\nabla \cdot \mathbf{a}) - (\mathcal{N} - 1) \mathbf{a} - (\mathbf{x} \cdot \nabla) \mathbf{a} \quad (\text{A.126})$$

$$\nabla (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}) = (\mathbf{x} \cdot \nabla) \mathbf{a} + \mathbf{a} + \mathbf{x} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{a}) \quad (\text{A.127})$$

$$\nabla (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}) = \mathbf{a} + (\nabla \mathbf{a}) \cdot \mathbf{x} \quad (\text{A.128})$$

$$(\nabla \mathbf{a}) \cdot \mathbf{x} = (\mathbf{x} \cdot \nabla) \mathbf{a} + \mathbf{x} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{a}) \quad (\text{A.129})$$

$$(\mathbf{a} \wedge \nabla) \wedge \mathbf{x} = -2 \mathbf{a} \quad (\text{A.130})$$

$$\nabla (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}) = (\mathbf{x} \wedge \nabla) \wedge \mathbf{a} + \mathbf{x} \nabla \cdot \mathbf{a} + (\mathcal{N} - 2) \mathbf{a} \quad (\text{A.131})$$

$$\nabla \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{x}) = 2 \mathbf{a} - \mathbf{x} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{a}) + (\mathbf{x} \wedge \nabla) \wedge \mathbf{a} \quad (\text{A.132})$$

$$\nabla (\mathbf{x} \wedge \mathbf{a}) = \mathbf{I} \wedge \mathbf{a} - (\nabla \mathbf{a}) \wedge \mathbf{x} \quad (\text{A.133})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \mathbf{x}) = (\nabla \cdot \mathbf{a}) \mathbf{x} + \mathbf{a} \quad (\text{A.134})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{x} \mathbf{a}) = \mathcal{N} \mathbf{a} + (\mathbf{x} \cdot \nabla) \mathbf{a} \quad (\text{A.135})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{x} \mathbf{a} - \mathbf{a} \mathbf{x}) = \nabla \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{x}) \quad (\text{A.136})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{x} \mathbf{a} + \mathbf{a} \mathbf{x}) = 2 \mathbf{a} + 2 (\nabla \cdot \mathbf{a}) \mathbf{x} + \nabla \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{x}) \quad (\text{A.137})$$

$$\mathbf{x} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{a}) = (\mathcal{N} - 1) \mathbf{a} + \nabla (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}) - \nabla \cdot (\mathbf{x} \mathbf{a}) \quad (\text{A.138})$$

$$\mathbf{x} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{a}) = (\mathcal{N} - 2) \mathbf{a} + \nabla (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}) - \nabla \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{x}) - (\nabla \cdot \mathbf{a}) \mathbf{x} \quad (\text{A.139})$$

$$\nabla \wedge [\mathbf{x} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{a})] = -(\mathcal{N} - 1) \nabla \wedge \mathbf{a} - (\mathbf{x} \cdot \nabla) \nabla \wedge \mathbf{a} \quad (\text{A.140})$$

A.7.3 Operations with two arbitrary vectors and one position vector

$$\nabla \cdot [(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \mathbf{x}] = [(\mathbf{x} \cdot \nabla) \mathbf{a}] \wedge \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge [(\mathbf{x} \cdot \nabla) \mathbf{b}] + \mathcal{N} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \quad (\text{A.141})$$

$$\nabla \cdot [(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \mathbf{x}] = [(\nabla \wedge \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{b})] \mathbf{x} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \quad (\text{A.142})$$

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla) (\mathbf{x} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{x} \wedge (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} \quad (\text{A.143})$$

A.7.4 Operations with tensors and one position vector

$$\nabla \cdot (\mathbf{S} \wedge \mathbf{x}) = -\mathbf{x} \wedge (\nabla \cdot \mathbf{S}) \quad (\text{A.144})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{W} \wedge \mathbf{x}) = -2\mathbf{w} + \mathbf{x} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{w}) \quad (\text{A.145})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{x} \wedge \mathbf{A}) = -\mathbf{x} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A}) \quad (\text{A.146})$$

$$\nabla \wedge [\mathbf{x}(\nabla \cdot \mathbf{u})] = \Omega \quad (\text{A.147})$$

Annexe B

Thermodynamics : Maxwell Equations and Jacobians

B.1 Mathematics

The total (exact, proper) differential of $z = z(x, y)$ is given by :

Total differential

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_y dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_x dy \quad (\text{B.1})$$

Reciprocally, if

$$dz = Mdx + Ndy. \quad (\text{B.2})$$

then the relation is a total differential if and only if :

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y} \right)_x = \left(\frac{\partial N}{\partial x} \right)_y, \quad (\text{B.3})$$

that is :

Cross derivatives

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_y \right)_x = \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_x \right)_y \quad (\text{B.4})$$

If $x = x(y, z)$ and $y = y(x, z)$ then :

$$dx = \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z dy + \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)_y dz \quad \text{and} \quad dy = \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_z dx + \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)_x dz. \quad (\text{B.5})$$

and inserting dy from the second relation into the first relation, and collecting the terms in dx and dz

$$\left[1 - \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_z \right] dx = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)_x + \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)_y \right] dz \quad (\text{B.6})$$

Since x and z can be varied independently, we can set $dz = 0$ and $dx = 0$ separately, giving respectively, the *reciprocal* relation

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_z = 1 \quad \text{or} \quad (\text{B.7})$$

Reciprocal relation

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z = \frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_z} \quad (\text{B.8})$$

and the *reciprocity* relation

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = -\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \quad \text{or} \quad (\text{B.9})$$

Reciprocity relation

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1 \quad (\text{B.10})$$

These relations can be obtained in an alternative manner. From :

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x dy. \quad (\text{B.11})$$

then by dividing by dz for y constant ($dy = 0$) :

$$1 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y + 0 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z}. \quad (\text{B.12})$$

Similarly, dividing by dx keeping z constant ($dz = 0$) :

$$0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial x}\right)_z + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_z \quad \rightarrow \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1. \quad (\text{B.13})$$

B.2 Maxwell Equations

From Gibbs equations :

$$de = Tds - pdv \quad (\text{B.14})$$

$$dh = Tds + vdp \quad (\text{B.15})$$

and the associated total differentials :

$$de = \left(\frac{\partial e}{\partial s}\right)_v ds + \left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)_s dv \quad (\text{B.16})$$

$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial s}\right)_p ds + \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_s dp \quad (\text{B.17})$$

then we deduce :

$$T = \left(\frac{\partial e}{\partial s}\right)_v \quad (\text{B.18})$$

$$p = -\left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)_s \quad (\text{B.19})$$

$$T = \left(\frac{\partial h}{\partial s}\right)_p \quad (\text{B.20})$$

$$v = \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_s \quad (\text{B.21})$$

and by cross-derivatives, we obtain :

Maxwell relations I

$$\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_v = -\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_s \quad (\text{B.22})$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_p = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s \quad (\text{B.23})$$

Using other thermodynamic potentials, such as Helmholtz free energy f and Gibbs free energy g :

$$f = e - Ts \quad (\text{B.24})$$

$$g = h - Ts \quad (\text{B.25})$$

then

$$df = -sdT - pdv \quad (\text{B.26})$$

$$dg = -sdT + vdp \quad (\text{B.27})$$

hence

$$s = -\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_v \quad (\text{B.28})$$

$$p = -\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_T \quad (\text{B.29})$$

$$s = -\left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)_p \quad (\text{B.30})$$

$$v = \left(\frac{\partial g}{\partial p}\right)_T \quad (\text{B.31})$$

from which we deduce :

Maxwell relations II

$$\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v \quad (\text{B.32})$$

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \quad (\text{B.33})$$

B.3 Jacobian methods

The material in this section comes from Carroll (1965); Crawford (1949); Margenau and Murphy (1956); Shaw (1935); Sherwood and Reed (1939); Tribus (1961); ?.

The Jacobian can be written as :

$$\frac{\partial(A, B)}{\partial(C, D)} = \frac{[A, B]}{[C, D]} = \frac{\oint A dB}{\oint C dD} = \frac{\left| \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial A}{\partial C}\right)_D & \left(\frac{\partial A}{\partial D}\right)_C \\ \left(\frac{\partial B}{\partial C}\right)_D & \left(\frac{\partial B}{\partial D}\right)_C \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial A}{\partial C}\right)_D & \left(\frac{\partial A}{\partial D}\right)_C \\ \left(\frac{\partial B}{\partial C}\right)_D & \left(\frac{\partial B}{\partial D}\right)_C \end{pmatrix} \right|} = \left(\frac{\partial A}{\partial C}\right)_D \left(\frac{\partial B}{\partial D}\right)_C - \left(\frac{\partial A}{\partial D}\right)_C \left(\frac{\partial B}{\partial C}\right)_D \quad (\text{B.34})$$

Properties :

$$\boxed{\frac{[A, B]}{[C, B]} = \left(\frac{\partial A}{\partial C}\right)_B} \quad (\text{B.35})$$

Then we can write :

$$\boxed{\frac{[A, B]}{[C, D]} = \frac{[A, D]}{[C, D]} \frac{[B, C]}{[D, C]} - \frac{[A, C]}{[D, C]} \frac{[B, D]}{[C, D]}} \quad (\text{B.36})$$

If the independent variables are obvious, then we can simplify the notation :

$$\frac{[A, B]}{[C, D]} = [A, B] \quad (\text{B.37})$$

$$\boxed{[A, B] = -[B, A]} \quad \text{or} \quad \frac{\partial(A, B)}{\partial(C, D)} = \frac{\partial(B, A)}{\partial(C, D)} \quad (\text{B.38})$$

$$\boxed{[A, A] = 0} \quad (\text{B.39})$$

$$dA = \left(\frac{\partial A}{\partial B} \right)_C dB + \left(\frac{\partial A}{\partial C} \right)_B dC = \frac{[A, C]}{[B, C]} dB + \frac{[A, B]}{[C, B]} dC \quad (\text{B.40})$$

$$\begin{aligned} \rightarrow [C, B] dA &= [C, B] \frac{[A, C]}{[B, C]} dB + [C, B] \frac{[A, B]}{[C, B]} dC \\ \rightarrow \boxed{[A, B] dC + [B, C] dA + [C, A] dB} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

$$\begin{aligned} \rightarrow [A, B] \left(\frac{\partial C}{\partial Z} \right)_D + [B, C] \left(\frac{\partial A}{\partial Z} \right)_D + [C, A] \left(\frac{\partial B}{\partial Z} \right)_D &= 0 \\ \rightarrow [A, B] \frac{[C, D]}{[Z, D]} + [B, C] \frac{[A, D]}{[Z, D]} + [C, A] \frac{[B, D]}{[Z, D]} &= 0 \\ \rightarrow \boxed{[A, B] [C, D] + [B, C] [A, D] + [C, A] [B, D]} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.42})$$

Using

$$dA = b dB + c dC \quad (\text{B.43})$$

with

$$b = \left(\frac{\partial A}{\partial B} \right)_C \quad \text{and} \quad c = \left(\frac{\partial A}{\partial C} \right)_B$$

then :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial A}{\partial Z} \right)_D &= b \left(\frac{\partial B}{\partial Z} \right)_D + c \left(\frac{\partial C}{\partial Z} \right)_D \\ \rightarrow \frac{[A, D]}{[Z, D]} &= b \frac{[B, D]}{[Z, D]} + c \frac{[C, D]}{[Z, D]} \\ \rightarrow \boxed{[A, D] = b [B, D] + c [C, D]} & \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

Using Gibbs equations, we find :

$$[e, D] = T [s, D] - p [v, D] \quad (\text{B.45})$$

$$[h, D] = T [s, D] + v [p, D] \quad (\text{B.46})$$

$$[f, D] = -s [T, D] - p [v, D] \quad (\text{B.47})$$

$$[g, D] = -s [T, D] + v [p, D] \quad (\text{B.48})$$

Converting Maxwell equations :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_v &= - \left(\frac{\partial T}{\partial v} \right)_s \\ \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)_p &= \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s \\ \left(\frac{\partial s}{\partial v} \right)_T &= \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \\ \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T &= - \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \end{aligned}$$

using Jacobians, gives :

$$\begin{aligned}\frac{[p, v]}{[s, v]} &= -\frac{[T, s]}{[v, s]} \\ \frac{[v, p]}{[s, p]} &= \frac{[T, s]}{[p, s]} \\ \frac{[s, T]}{[v, T]} &= \frac{[p, v]}{[T, v]} \\ \frac{[s, T]}{[p, T]} &= -\frac{[v, p]}{[T, p]}\end{aligned}$$

that is, one single equation :

$$[p, v] = [T, s] \quad (\text{B.49})$$

which means that :

$$\oint p dv = \oint T ds \quad (\text{B.50})$$

which could have been inferred from Gibbs equation $de = Tds - pdv$ since :

$$\oint de = 0 \quad (\text{B.51})$$

B.4 Measurable quantities

$$\text{Coefficient of isothermal compressibility : } \alpha_T = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T = -\frac{1}{v} \frac{[v, T]}{[p, T]} \quad (\text{B.52})$$

$$\text{Coefficient of isobaric thermal expansion : } \beta_p = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{v} \frac{[v, p]}{[T, p]} \quad (\text{B.53})$$

$$\text{Specific heat at constant pressure : } c_p = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p = T \frac{[s, p]}{[T, p]} \quad (\text{B.54})$$

$$\text{Specific heat at constant volume : } c_v = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_v = T \frac{[s, v]}{[T, v]} \quad (\text{B.55})$$

B.5 Speed of sound

The speed of sound is defined as :

$$a^2 \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = -v^2 \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_s \quad (\text{B.56})$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_s = \frac{[p, s]}{[v, s]} = \frac{[s, p]}{[s, v]} = \frac{T \frac{[s, p]}{[T, p]} [T, p]}{T \frac{[s, v]}{[T, v]} [T, v]} = \frac{c_p [T, p]}{c_v [T, v]} = \frac{c_p [p, T]}{c_v [v, T]} = \frac{c_p}{c_v} \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_T \quad (\text{B.57})$$

Isentropic speed of sound

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \frac{c_p}{c_v} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T = \gamma \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T \quad (\text{B.58})$$

B.6 Meyer equation

$$c_v = T \frac{[s, v]}{[T, v]} = T \frac{[s, v]}{\frac{[T, p]}{[T, v]}} = T \frac{[s, v]}{\frac{[T, p]}{[v, T]}} = -\frac{T}{v\alpha_T} \frac{[s, v]}{[T, p]} \quad (\text{B.59})$$

Using Equation B.36 :

$$\frac{[s, v]}{[T, p]} = \frac{[s, p]}{[T, p]} \frac{[v, T]}{[p, T]} - \frac{[s, T]}{[p, T]} \frac{[v, p]}{[T, p]} \quad (\text{B.60})$$

and with $[s, T] = [v, p]$:

$$\frac{[s, v]}{[T, p]} = \frac{[s, p]}{[T, p]} \frac{[v, T]}{[p, T]} - \frac{[v, p]}{[p, T]} \frac{[v, p]}{[T, p]} = \frac{[s, p]}{[T, p]} \frac{[v, T]}{[p, T]} + \frac{[v, p]}{[T, p]} \frac{[v, p]}{[T, p]} \quad (\text{B.61})$$

$$\frac{[s, v]}{[T, p]} = \frac{c_p}{T} (-v\alpha_T) + v^2\beta_p^2 \quad (\text{B.62})$$

then :

$$c_v = -\frac{T}{v\alpha_T} \left[\frac{c_p}{T} (-v\alpha_T) + v^2\beta_p^2 \right] \quad (\text{B.63})$$

$$c_v = c_p - Tv \frac{\beta_p^2}{\alpha_T} \quad (\text{B.64})$$

or :

Meyer equation

$$c_p - c_v = Tv \frac{\beta_p^2}{\alpha_T} \quad (\text{B.65})$$

This relation can also be obtained from Equation B.42 :

$$[T, s] [p, v] + [s, p] [T, v] + [p, T] [s, v] = 0 \quad (\text{B.66})$$

With $[T, s] = [p, v]$:

$$[p, v] [p, v] + \frac{c_p}{T} [T, p] [T, v] + [p, T] \frac{c_v}{T} [T, v] = 0 \quad (\text{B.67})$$

$$c_p - c_v = T \frac{[p, v]}{[T, p]} \frac{[p, v]}{[v, T]} = T \frac{[v, p]}{[T, p]} \frac{[v, p]}{[T, p]} \frac{[T, p]}{[v, T]} = -T \left(\frac{[v, p]}{[T, p]} \right)^2 \frac{1}{\frac{[v, T]}{[p, T]}} = Tv \frac{\beta_p^2}{\alpha_T} \quad (\text{B.68})$$

B.7 Joule-Thomson coefficient

$$\mu_{JT} = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_h = \frac{[T, h]}{[p, h]} = \frac{[T, h]}{\frac{[T, p]}{[p, h]}} = -\frac{[h, T]}{\frac{[p, T]}{[T, p]}} \quad (\text{B.69})$$

Using Gibbs equation $dh = Tds + vdp$

$$\frac{[h, T]}{[p, T]} = T \frac{[s, T]}{[p, T]} + v \quad (\text{B.70})$$

$$\frac{[h, p]}{[T, p]} = T \frac{[s, p]}{[T, p]} \quad (\text{B.71})$$

With :

$$\frac{[s, T]}{[p, T]} = \frac{[v, p]}{[p, T]} = -\frac{[v, p]}{[T, p]} = -v\beta_p \quad (\text{B.72})$$

$$T \frac{[s, p]}{[T, p]} = c_p \quad (\text{B.73})$$

then :

$$\mu_{\text{JT}} = \frac{\beta_p T - 1}{\rho c_p} \quad (\text{B.74})$$

Annexe C

Chaleurs Spécifiques

L'objectif de ce Chapitre annexe est de présenter les grandes lignes du comportement des chaleurs spécifiques d'un gaz en fonction de la température. Pour de plus amples détails, le lecteur peut se référer à l'ouvrage classique de Vincenti and Kruger (1967). La discussion présente suit fidèlement l'exposé dans les ouvrages de Liepmann and Roshko (1957, Chap. 14), ainsi que l'ouvrage de Thompson (1972, Chap. 2).

C.1 Eléments de physique statistique et quantique

C.1.1 Degrés de liberté d'une molécule

Un gaz parfait est constitué de molécules qui n'interagissent que très peu entre elles (sauf lors de collisions, qui n'occupent qu'une fraction infime du temps de vie d'une molécule), et la contribution de l'énergie potentielle résultant des interactions intermoléculaires à l'énergie interne est négligeable. Toute l'énergie du gaz réside donc dans la molécule elle-même. Sous ces conditions, le théorème d'équipartition de la physique statistique classique prévoit une énergie moléculaire moyenne de $1/2 \cdot kT$ par degrés de liberté de la molécule, où k est la constante de Boltzmann et T la température. Le nombre de degrés de liberté f (f pour *freedom* en anglais) est simplement le nombre de coordonnées généralisées requises pour fixer l'état d'énergie de la molécule, qui peut alors s'écrire comme la somme de f termes quadratiques en ces coordonnées généralisées.

Degrés de liberté associés à la translation d'une molécule

Pour une molécule de masse m et de coordonnées x_1, x_2, x_3 , le nombre de degrés de liberté associés à sa translation est égal à $f = 3$ correspondant aux coordonnées généralisées (quantité de mouvement) $p_1 = m\dot{x}_1, p_2 = m\dot{x}_2, p_3 = m\dot{x}_3$ de la molécule avec l'énergie (cinétique) associée $p_1^2/2m + p_2^2/2m + p_3^2/2m$.

Degrés de liberté associés à la vibration d'une molécule (diatomique)

Une molécule diatomique aura (outre des degrés de liberté associés à sa translation et sa rotation) des degrés de liberté supplémentaires associés à sa vibration. Avec la fréquence propre de vibration de la molécule ω , l'énergie de vibration peut s'écrire en fonction de deux coordonnées généralisées (allongement x du "ressort" et quantité de mouvement $p = m\dot{x}$) comme $p^2/2m + m\omega^2 x^2/2$, donnant ainsi $f = 2$ degrés de liberté associés à sa vibration.

C.1.2 Energie et enthalpie interne d'un gaz

D'une manière générale, l'énergie interne d'une molécule avec f degrés de liberté est égale à :

$$\epsilon = \frac{f}{2} kT. \quad (\text{C.1})$$

Un gaz contenant des molécules avec f degrés de liberté a donc une énergie interne massique e donnée par

$$e = \frac{f}{2} rT. \quad (\text{C.2})$$

L'enthalpie spécifique est alors

$$h = e + pv = \frac{f}{2} rT + rT = \frac{f+2}{2} rT \quad (\text{C.3})$$

C.1.3 Chaleurs spécifiques et γ

Les chaleurs spécifiques sont alors égales à

$$\begin{aligned} c_v &= \frac{f}{2}r \\ c_p &= \frac{f+2}{2}r \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

donnant ainsi pour le rapport des chaleurs spécifiques

$$\gamma = \frac{f+2}{f}. \quad (\text{C.5})$$

Un gaz parfait satisfaisant le théorème classique d'équipartition d'énergie est ainsi calorifiquement parfait car $\gamma = \text{cste}$.

C.1.4 Gaz monoatomique

Pour un gaz monoatomique (He, Ne, Ar, etc.) avec la structure moléculaire la plus simple, il n'y a que 3 degrés de liberté associés avec la translation de la molécule, donnant ainsi $f = 3$. La relation (C.5) donne

$$\gamma = \frac{5}{3} = 1.667 \quad (\text{C.6})$$

qui est bien confirmé par l'expérience (Figure C.1).

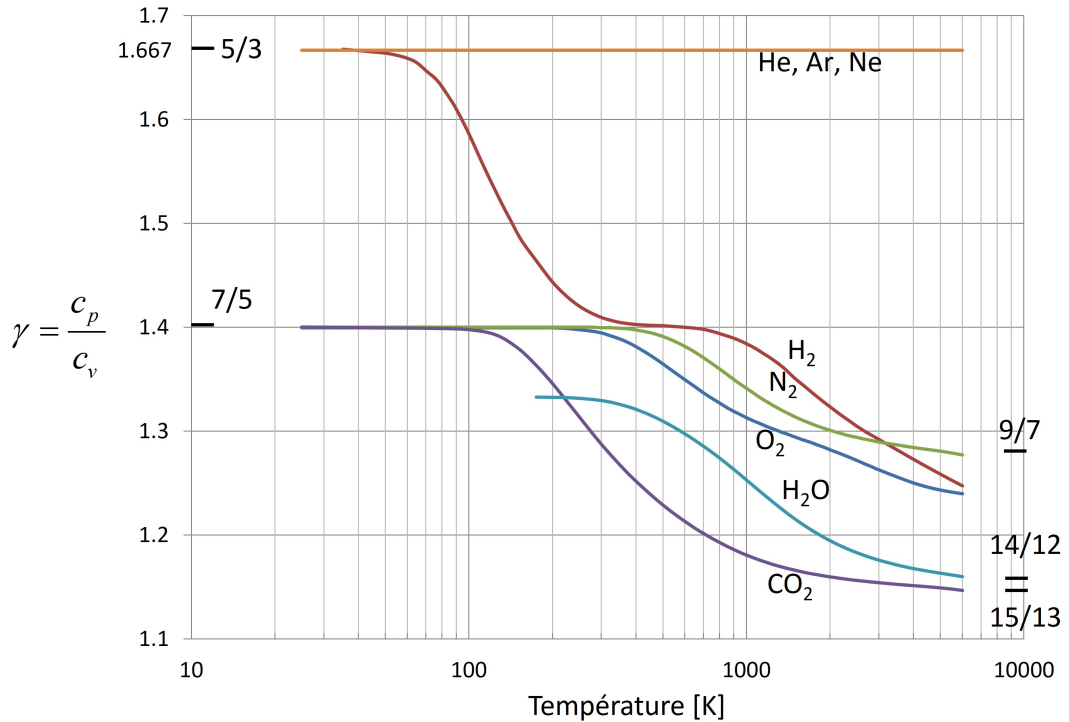


FIGURE C.1 – Variation avec la température de la chaleur spécifique de gaz formés de molécules monoatomiques, diatomiques, et triatomiques

C.1.5 Gaz formé de molécules complexes

A l'autre extrême, un gaz composé de molécules complexes aura un nombre de degrés de liberté f très grand $f \rightarrow \infty$ et aura ainsi un rapport de chaleurs spécifiques γ tendant vers 1.

C.1.6 Gaz général

Ainsi, d'une manière générale,

$$1 \leq \gamma \leq 1.667 \quad (\text{C.7})$$

C.1.7 Gaz diatomique

Pour une molécule diatomique (formée de deux atomes) telle H_2 , N_2 , O_2 , etc., le nombre de degrés de liberté s'évalue comme suit

$$\begin{array}{ll} \text{Translation du centre de masse} & f = 3 \\ \text{Rotation par rapport à 2 axes principaux} & f = 2 \\ \text{Vibration par rapport au centre de masse} & f = 2 \\ \hline & f = 7 \end{array}$$

Cette valeur de f donne un rapport de chaleurs spécifiques égal à $\gamma = 9/7 = 1.286$. Expérimentalement (Figure C.1), on observe que la valeur de γ est plus proche de 1.4 à des températures ambiantes, et diminue vers cette valeur de 1.286 à des températures plus élevées (quelques milliers de kelvin). La théorie classique de l'équipartition semble donner la bonne valeur seulement aux températures élevées. La raison est que la théorie de la physique classique ne prend pas en compte correctement la quantification de l'énergie. Ce phénomène est d'ailleurs évident dans le cas de la molécule d'hydrogène (Figure C.1). A des températures faibles (moins de 100 K), le γ de l'hydrogène est sensiblement identique à celui des molécules monoatomiques, comme si les degrés de liberté de rotation et de vibration n'avaient pas été activés. A des températures très élevées, on retrouve $\gamma = 9/7$, tandis que pour les températures intermédiaires, la valeur $\gamma = 1.4$ refait son apparition.

Sans vouloir rentrer dans les détails de la mécanique quantique, il suffit de mentionner que les degrés de liberté sont activés ou *activés* seulement à partir de certaines valeurs de température. On appelle θ la température d'excitation, et on y ajoute l'indice r ou v selon qu'il s'agisse de l'excitation de la rotation ou de la vibration. Les valeurs de ces températures pour des gaz communs sont indiquées sur le Tableau.

	θ_r , K	θ_v , K
H_2	87.5	6 325
N_2	2.9	3 393
O_2	2.1	2 273

TABLE C.1 – Température d'excitation des degrés de liberté de molécules diatomiques.

Quand la température est inférieure à θ_r , seule le degré de liberté de translation intervient, et la molécule diatomique peut être assimilée à un gaz monoatomique avec $f = 3$ et $\gamma = 5/3 = 1.667$.

Quand la température est nettement supérieure à θ_r mais largement inférieure à θ_v , seuls les trois degrés de liberté de translation et les deux degrés de liberté de rotation sont activés, et l'on a alors $f = 3 + 2 = 5$ et $\gamma = 7/5 = 1.4$.

Finalement, quand la température est largement supérieure à θ_v , les degrés de liberté de translation, de rotation et de vibration sont activés, et l'on a alors $f = 3 + 2 + 2 = 7$ et $\gamma = 9/7 = 1.286$.

Il est à remarquer que pour des températures communément rencontrées en ingénierie, le degré de liberté de rotation est toujours activé.

La mécanique quantique montre alors que dans la plage de température proche de θ_v , les chaleurs spécifiques varie avec la température selon les relations

$$\begin{aligned} c_v &= r \left[\frac{5}{2} + \frac{(\theta_v/T)^2 e^{\theta_v/T}}{(e^{\theta_v/T} - 1)^2} \right] \\ c_p &= c_v + r = r \left[\frac{7}{2} + \frac{(\theta_v/T)^2 e^{\theta_v/T}}{(e^{\theta_v/T} - 1)^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

En résumé

$$\begin{aligned}
T \ll \theta_r, \quad f = 3, \quad c_v = \frac{3}{2}r, \quad c_p = \frac{5}{2}r, \quad \gamma = \frac{5}{3} = 1.667 \\
\theta_r \ll T \ll \theta_v, \quad f = 3 + 2, \quad c_v = \frac{5}{2}r, \quad c_p = \frac{7}{2}r, \quad \gamma = \frac{7}{5} = 1.4 \\
T \gg \theta_v, \quad f = 3 + 2 + 2, \quad c_v = \frac{7}{2}r, \quad c_p = \frac{9}{2}r, \quad \gamma = \frac{9}{7} = 1.286
\end{aligned} \tag{C.9}$$

A des températures plus élevées que θ_v , d'autres phénomènes entrent en jeu, en particulier la dissociation et l'ionisation. Dans ce cours, ces phénomènes ne seront pas pris en compte. Ils font partie intégrante d'un cours en hypersonique.

C.1.8 Gaz triatomique

Certains gaz triatomiques se retrouvent communément dans de nombreuses situations d'ordre pratique, en particulier dans les problèmes associés aux phénomènes de combustion. Ces gaz sont l'eau (H_2O) et le dioxyde de carbone (CO_2), les produits principaux issus de la combustion d'hydrocarbures avec l'oxygène. Le comportement du γ de ces gaz en fonction de la température apparaît sur la Figure C.1.

La molécule de dioxyde de carbone voit ses degrés de liberté de vibration activés à des températures assez faibles. Ainsi, dans les plages de température rencontrées communément en ingénierie, γ varie assez fortement entre $7/5 = 1.4$ et $15/13 \sim 1.15$. Sa valeur de $7/5$ (quand les modes de vibrations ne sont pas activés) provient du fait que sa configuration est linéaire et donc similaire à une molécule diatomique. A haute température, la molécule de dioxyde de carbone a 4 modes de vibration, donc 8 degrés de liberté en vibrations (sous forme cinétique et potentielle), pour un total de $3 + 2 + 8 = 13$ degrés de liberté.

Quant à la molécule d'eau, à des températures ambiantes elle tend vers des valeurs de γ égales à $8/6 = 4/3$, ce qui est dû au fait que la molécule d'eau a 3 modes de rotation à cause de sa forme en V, contrairement à la molécule de dioxyde de carbone qui n'en a que deux (à cause de sa configuration linéaire). A haute températures, la molécule d'eau a 3 modes de vibrations, donc 6 degrés de liberté, ce qui lui confère un nombre total de degrés de liberté égal à $3 + 3 + 6 = 12$, et donc des valeurs de γ égales à $14/12 = 7/6 \sim 1.17$.

Annexe D

Ecoulements et Débit Massique dans une Tuyère

Dans cette annexe, nous allons étudier quantitativement le comportement du débit massique dans une tuyère convergente et une tuyère convergente-divergente.

D.1 Conditions à la sortie d'une tuyère

A la sortie d'une tuyère, l'écoulement se comporte comme un *jet libre*. En d'autres termes, il y a séparation de l'écoulement au niveau de la paroi de sortie car l'écoulement ne réussit pas à entreprendre un changement de direction brusque.

Le milieu ambiant où se déverse le jet (qui peut être l'atmosphère ou le vide) est à une pression qu'on appelle ambiante, atmosphérique, ou arrière (de l'anglais *back pressure*). La pression au sein du jet à la sortie est appelée pression de sortie (*exit pressure* en anglais).

L'interface entre le jet et le milieu ambiant (qui peut être le vide) porte différents noms, comme surface (ou couche) de cisaillement, surface libre, ou encore surface de contact (*contact surface* en anglais).

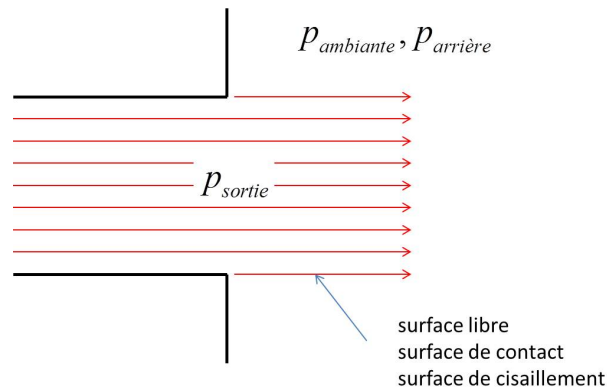


FIGURE D.1 – Ecoulement en sortie de tuyère.

Nous ne rentrerons pas dans les détails de la structure complexe de l'écoulement au niveau de cette interface, mais nous distinguerons deux cas, selon que l'écoulement est subsonique ou supersonique à la sortie.

Subsonique

En supposant que le milieu ambiant reste globalement inaltéré par la présence du jet, la condition habituelle au niveau de l'interface est qu'il y ait continuité de la pression

$$p_{\text{sortie}} = p_{\text{arrière}}, \quad (\text{D.1})$$

qui est la condition standard pour les écoulements incompressibles (jet d'eau dans l'atmosphère).

Supersonique

La condition de continuité de la pression à travers l'interface reste toujours valable, et ainsi, à une petite distance au delà de la sortie, la pression dans le jet est égale à la pression arrière. Cependant,

comme l'écoulement est supersonique, la condition de pression juste après la sortie du jet ne peut remonter l'écoulement, et de ce fait la pression de sortie du jet peut être inférieure, égale, ou supérieure à la pression arrière.

Si la pression de sortie est égale à la pression arrière, la configuration du jet est identique à celle d'un écoulement subsonique.

Si la pression de sortie est supérieure à la pression arrière, une onde de *détente* permet à l'écoulement de passer d'une région de haute pression à une région de basse pression (voir chapitre sur les écoulements de Prandtl-Meyer). La tuyère est alors sous-détendue (*under-expanded* en anglais).

Si la pression de sortie est inférieure à la pression arrière, une onde de *choc* permet à l'écoulement de passer d'une région de basse pression à une région de haute pression (voir chapitre sur les ondes de choc). La tuyère est alors sur-détendue (*over-expanded* en anglais).

Il va sans dire que la condition où la pression de sortie est égale à la pression arrière est ce que l'on appelle le *point de fonctionnement* (ou *design operation*) de la tuyère.

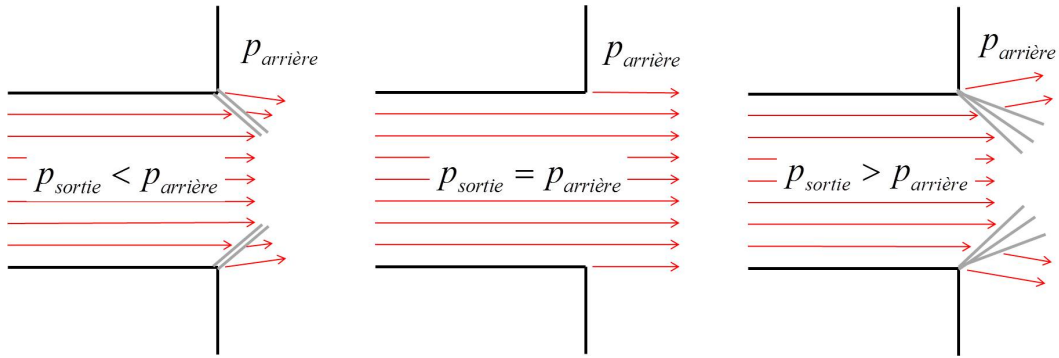


FIGURE D.2 – Etat de sortie des tuyères en régime supersonique. De gauche à droite : sur-détente, point de fonctionnement, sous-détente.

D.2 Débit massique en écoulement isentropique

D.2.1 Débit massique en fonction du nombre de Mach

Nous avons vu dans le chapitre 5 que le débit massique peut s'écrire

$$\dot{m} = \frac{p_0}{a_0} A \gamma M \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}, \quad (\text{D.2})$$

ou de manière équivalente

$$\dot{m} = \frac{p_0}{\sqrt{\gamma T_0}} A \sqrt{\gamma} M \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}. \quad (\text{D.3})$$

En particulier, il est à remarquer que le débit massique ne dépend que de

- * Conditions de réservoir (p_0, T_0)
- * Nombre de Mach local (M)
- * Aire de la section locale (A)

D.2.2 Débit massique en fonction de la pression

Le débit massique

$$\dot{m} = \rho u A \quad (\text{D.4})$$

peut être exprimé en fonction de la pression en utilisant l'expression pour la masse volumique (en écoulement isentropique)

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (\text{D.5})$$

ainsi que l'expression pour la vitesse (voir discussion sur le tube de Pitot en chapitre 4)

$$u = \sqrt{\frac{2\gamma r T_0}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}, \quad (\text{D.6})$$

donnant ainsi

$$\dot{m} = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} A \sqrt{\frac{2\gamma r T_0}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]} \quad (\text{D.7})$$

ou, en regroupant les termes de pression,

$$\dot{m} = \rho_0 A \sqrt{\frac{2\gamma r T_0}{\gamma - 1}} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}, \quad (\text{D.8})$$

ou encore

$$\dot{m} = A \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}} \frac{p_0}{\sqrt{r T_0}} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}. \quad (\text{D.9})$$

Il est à remarquer que cette relation aurait pu être obtenu directement en explicitant le nombre de Mach M en fonction de p/p_0 à partir de la relation

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad (\text{D.10})$$

et en remplaçant dans la relation du débit en fonction du nombre de Mach, Equation D.3.

D.2.3 Représentation graphique et valeurs soniques

On a ainsi deux relations pour le débit massique, Equation D.3 et Equation D.9, une en fonction du nombre de Mach local M et une en fonction de la pression locale p . Ces deux relations peuvent être sous forme adimensionnelle

$$\frac{\dot{m} \sqrt{r T_0}}{p_0 A} = \sqrt{\gamma} M \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}, \quad (\text{D.11})$$

$$\frac{\dot{m} \sqrt{r T_0}}{p_0 A} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}, \quad (\text{D.12})$$

dont la représentation graphique est donnée sur la Figure D.3.

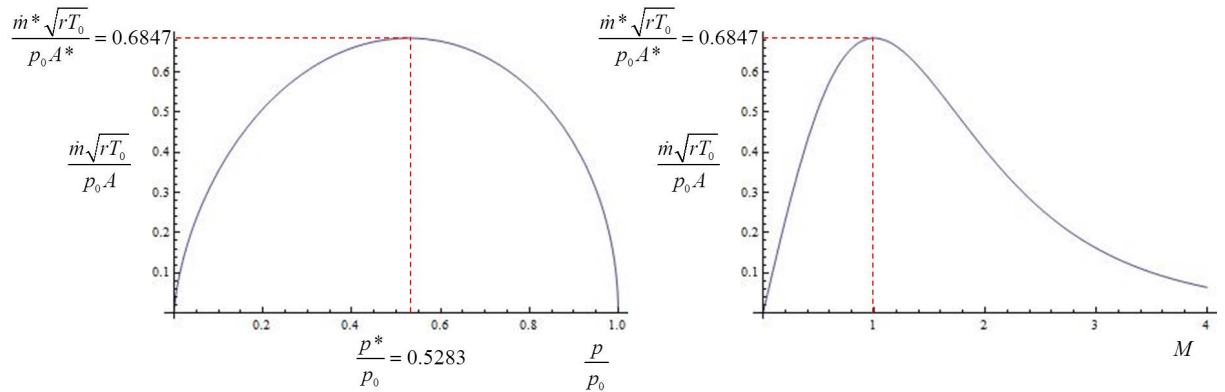


FIGURE D.3 – Variation du débit massique avec la pression et le nombre de Mach pour $\gamma = 1.4$.

Quand le nombre de Mach est égale à l'unité $M = 1$ (conditions soniques), on peut vérifier que ces deux expressions fournissent le même résultat

$$\frac{\dot{m}_* \sqrt{r T_0}}{p_0 A_*} = \sqrt{\gamma} \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}, \quad (\text{D.13})$$

$$\frac{p_*}{p_0} = \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \quad (\text{D.14})$$

Selon les valeurs de γ , on obtient les valeurs de la table ci-dessous (les valeurs pour la pression ont déjà été rencontrées dans le chapitre 4)

γ	Monoatomique $5/3 = 1.667$	Diatomique $7/5 = 1.4$	$9/7 = 1.286$
$\frac{\dot{m}_* \sqrt{rT_0}}{p_0 A_*}$	0.7262	0.6847	0.6647
$\frac{p_*}{p_0}$	0.4871	0.5283	0.5483

TABLE D.1 – Débit massique et pression aux conditions soniques

La Figure D.3 présente fournit une image riche en détails.

Le paramètre de l'ordonnée $\dot{m}\sqrt{rT_0}/p_0 A$ ne représente pas le débit massique, mais le débit massique par unité de surface (de la section de la tuyère), en considérant que les conditions de réservoir soit constantes. Cette quantité peut donc être examinée de deux manières.

Pour un débit donné (donc \dot{m} fixe), qui sera constant le long de la tuyère (par conservation de masse), ce paramètre $\dot{m}\sqrt{rT_0}/p_0 A$ est une indication de la variation de section le long de la tuyère en fonction de la variation du nombre de Mach M local et de la pression locale p . Ainsi, pour un débit donné, il est possible de suivre l'évolution du nombre de Mach et de la pression en fonction de la section (en inversant l'abscisse et l'ordonnée), à condition que l'écoulement soit isentropique.

D'autre part, pour une section donnée de la tuyère (donc A fixe), le paramètre $\dot{m}\sqrt{rT_0}/p_0 A$ est une indication du débit massique en cette section particulière de la tuyère en fonction du nombre de Mach local M et la pression locale p/p_0 . Cette interprétation nous permettra en particulier d'évaluer la variation du débit en sortie d'une tuyère convergent avec les variations de la pression de sortie.

Les deux courbes de la Figure D.3 présentent toutes deux un maximum, qui, de surcroît, se produit à un nombre de Mach $M = 1$ et à une pression correspondant à la valeur dans des conditions soniques p_*/p_0 . Pour une valeur de la section donnée, on en conclut que *le débit massique est maximum quand la vitesse de l'écoulement atteint la vitesse du son*. Cette propriété sera liée au concept de blocage sonique (*choked flow*).

Ces remarques nous permettent maintenant d'examiner en détail l'écoulement dans une tuyère convergente et une tuyère convergent-divergente.

D.3 Ecoulement dans une tuyère convergente

L'écoulement dans une tuyère convergente est engendrée par une pression totale p_0 régnant en amont de la tuyère. La configuration de l'écoulement va dépendre de la pression arrière $p_{\text{arrière}}$ à la sortie de la tuyère, que l'on nomme également pression ambiante ou pression en aval (*back pressure* en langue anglaise), que l'on dénotera avec l'indice α , donc p_α . Cette pression peut varier de la valeur $p_\alpha = p_0$ (sans écoulement) jusqu'au vide ($p_\alpha = 0$), indépendamment des conditions dans le réservoir. En particulier, dans certaines souffleries supersoniques, la pression en aval de la tuyère peut être réglée arbitrairement en évacuant la tuyère dans une chambre à pression ajustable. Pour une tuyère de fusée, la pression arrière représente la pression atmosphérique ambiante, qui peut varier selon l'altitude de la fusée, jusqu'à atteindre une valeur presque nulle (par rapport à la pression de réservoir) au-delà de la troposphère.

La Figure D.4 illustre les différents points d'opération de la tuyère en fonction des différentes valeurs de la pression arrière (a , b , c , d). Le graphe du débit massique est considéré en sortie de tuyère, où la section a une valeur minimale.

Quand la pression arrière a la même valeur que dans le réservoir (cas a), aucun écoulement ne se produit.

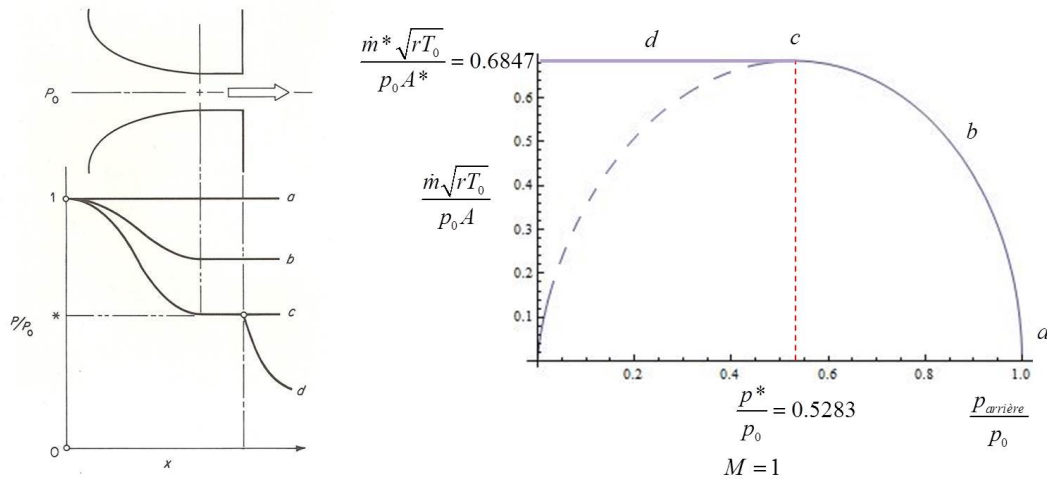


FIGURE D.4 – Écoulement dans une tuyère convergente en fonction de la pression arrière (pour $\gamma = 1.4$).

Quand la pression arrière a une valeur située comme dans le cas *b*, entre le cas *a* et *c*, c'est à dire entre p_* et p_0 , un écoulement subsonique se produit dans la tuyère. Dans ce cas, la pression arrière est égale à la pression en sortie de tuyère. Par exemple, pour $p_a/p_0 = 0.65$, les tables isentropiques pour $\gamma = 1.4$ fournissent un nombre de Mach $M = 0.81$ en sortie de tuyère. Le débit massique a alors une valeur particulière dépendante des conditions de réservoir et de la valeur de l'aire de la section de sortie A .

Quand la pression arrière est égale à p_* (cas *c*), l'écoulement est sonique en sortie de tuyère ($M = 1$). Pour $\gamma = 1.4$, on a vu que $p_*/p_0 = 0.5283$ (cette valeur se retrouve dans les tables isentropiques pour $M = 1$). En ce point de fonctionnement, le débit massique a atteint sa valeur maximale, qui pour $\gamma = 1.4$ est égale à $\dot{m}_* \sqrt{rT_0}/p_0 A_* = 0.6847$.

Si la pression arrière est réduite au dessous de cette valeur p_* (cas *d*), l'écoulement dans la tuyère restera inchangé, étant donné que le nombre de Mach maximal dans une tuyère convergente est égal à 1 et celui-ci se produit où la section est minimale, donc au col (sortie de tuyère). La détente se produira alors à l'extérieur de la tuyère (par des ondes de détentes). En particulier, la pression de sortie de tuyère restera égale à p_* , et les ondes de détentes (à l'extérieur de la tuyère) permettront à l'écoulement de rejoindre la valeur de la pression arrière (inférieure à p_*).

Lorsque l'écoulement devient sonique au col, aucune perturbation ne peut remonter dans le convergent. Par conséquent, l'écoulement dans le convergent ne communique plus avec l'écoulement en aval du col et n'a aucun moyen de savoir que la pression de sortie continue à diminuer. Physiquement, ce phénomène est facile à comprendre du fait qu'aucun message (se propageant à la vitesse du son) ne peut remonter l'écoulement si en un endroit la vitesse est égale à la vitesse du son.

Le débit-masse ne dépend que des conditions régnant dans le réservoir et non pas de la pression arrière à condition toutefois que l'écoulement soit sonique au col. Ainsi, pour une valeur de p_0 constante, le débit-masse sortant de la tuyère n'augmente pas en baissant la pression arrière (Fig. D.4). Ce phénomène constitue l'effet de *blocage sonique* (*choked flow*) d'un écoulement compressible. La valeur du débit massique est donné par $\dot{m}_* \sqrt{rT_0}/p_0 A_* = 0.6847$ (pour $\gamma = 1.4$).

D.4 Tuyère convergente-divergente ou de Laval

L'écoulement dans une tuyère de Laval engendré par une pression totale p_0 régnant en amont de la tuyère se présente comme indiqué sur la Figure D.5 en fonction de la pression variable p_a régnant en aval de la tuyère.

Si p_a est suffisamment élevée, l'écoulement demeure subsonique tout le long de la tuyère (cas *a* et *b*).

Dans le cas *c*, le col devient sonique au moment où la pression arrière a une valeur particulière (égale à celle du cas *c*). L'écoulement est isentropique tout le long de la tuyère, et en particulier, subsonique. Le fait que l'écoulement soit subsonique dans la partie divergente est confirmé par la tendance de la pression

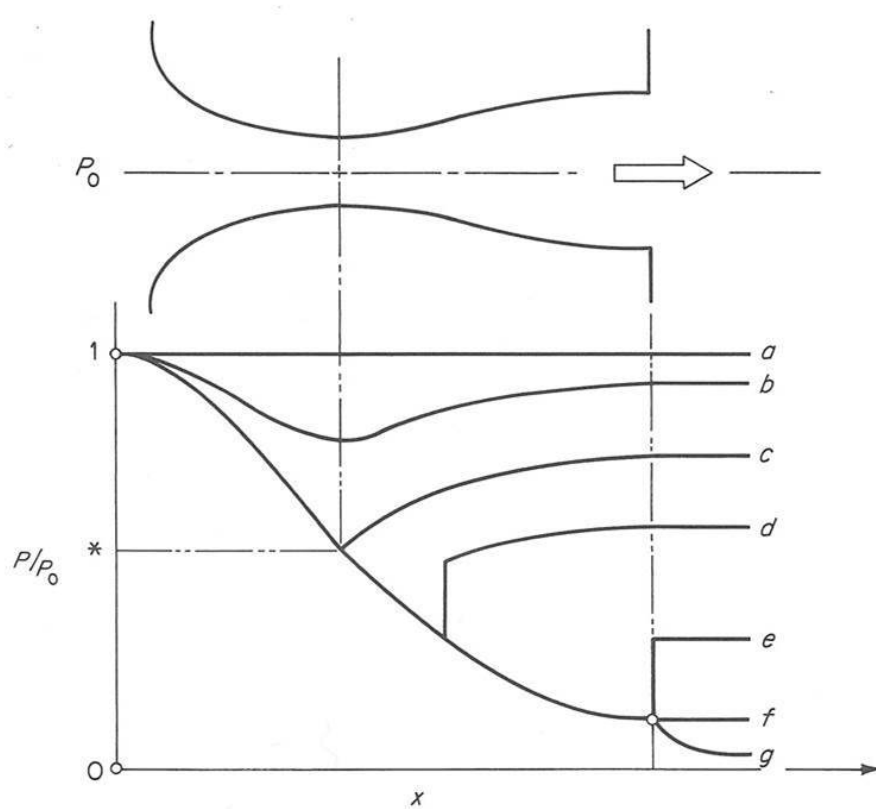


FIGURE D.5 – Ecoulement dans une tuyère convergente-divergente en fonction de la pression arrière.

(qui augmente) dans la partie divergente, qui suit la tendance de la section (qui augmente également). Dans ce cas, le débit massique a atteint sa valeur maximale, qui peut être déterminée par sa valeur au col (le débit massique est constant le long de la tuyère). Ainsi, pour $\gamma = 1.4$, la valeur du débit massique est donnée par $\dot{m}_* \sqrt{rT_0}/p_0 A_* = 0.6847$, où A_* représente la valeur de la section au col de la tuyère de Laval.

Comme l'écoulement a atteint la valeur sonique au col ($M = 1$), toute réduction de pression en aval de ce col ne produira plus de changement dans la partie convergente. Il y a blocage sonique : le débit massique a atteint sa valeur maximale et l'écoulement dans la partie convergente (distributions de pression, vitesse etc.) restera inchangé.

Les cas d et e étant mis à l'écart pour l'instant, quand la pression arrière atteint une valeur égale à celle du cas f , l'écoulement (isentropique) est alors supersonique dans la partie divergente, tout en restant subsonique dans la partie convergente et sonique au col. Le cas f est appelé *point de fonctionnement* (*design operation*) car la globalité de l'écoulement dans la tuyère et en sortie est isentropique et sa vitesse de sortie est maximale (un des objectifs des tuyères, en particulier celles des propulseurs supersoniques).

Entre les cas c et f , l'écoulement est caractérisé par la présence d'ondes de choc dans la tuyère et à la sortie. Ce phénomène sera examiné dans des chapitres ultérieurs. Pour des pressions arrières inférieures à celles du cas f (cas g par exemple), des ondes de détente se forment en sortie (ce phénomène sera également étudié dans des chapitres ultérieurs).

On remarquera qu'entre les cas c et g , le débit massique ne change pas, et pour $\gamma = 1.4$, cette valeur est donnée par $\dot{m}_* \sqrt{rT_0}/p_0 A_* = 0.6847$, où A_* représente la valeur de la section au col de la tuyère de Laval.

Annexe E

Ondes de détentes sur les profils aérodynamiques et dans les tuyères

E.1 Écoulements supersoniques autour de profils

Une illustration classique des écoulements de Prandtl-Meyer est l'étude d'écoulements supersoniques autour de profils. Les grandeurs physiques intéressantes associées à ce type de géométrie, sauf les effets visqueux, peuvent être calculées à partir de la théorie précédente, en particulier la portance, la traînée (non visqueuse), le centre de pression et les moments. Dans ce paragraphe, nous nous intéresserons essentiellement aux forces de portance et de traînée.

E.1.1 Portance et traînée

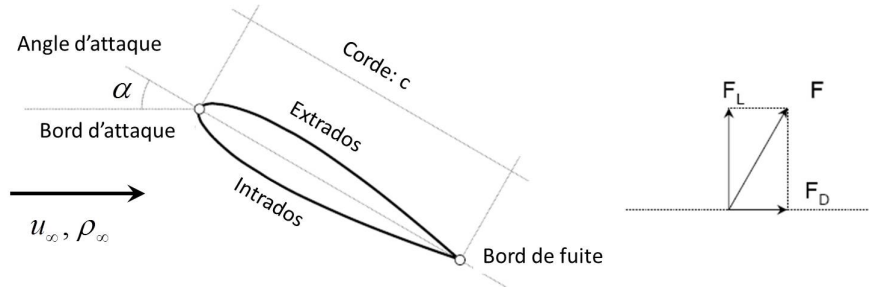


FIGURE E.1 – Profil d'aile

Considérons un écoulement autour d'un profil avec un nombre de Mach amont de $M_\infty = u_\infty/a_\infty$. On définit la corde du profil c , longueur entre le bord d'attaque et le bord de fuite du profil. On suppose que la corde du profil est inclinée d'un angle α par rapport à l'écoulement incident. Par définition, la portance F_L (où l'indice L rappelle le terme anglais *lift* pour portance) est la composante de la force aérodynamique appliquée sur le profil et dirigée perpendiculairement à la vitesse \mathbf{u}_∞ de l'écoulement amont. La traînée F_D (où l'indice D rappelle le terme anglais *drag* pour traînée) est la force de résistance à l'avancement selon la direction du mouvement. On définit alors le coefficient adimensionnel de portance par unité d'envergure

$$c_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho_\infty u_\infty^2 c} = \frac{F_L}{\frac{\gamma}{2}p_\infty M_\infty^2 c}, \quad (\text{E.1})$$

où la dernière égalité est obtenue par définition du nombre de Mach en utilisant la relation pour la vitesse du son ainsi que l'équation d'état. De la même manière, le coefficient de traînée est donné par

$$c_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho_\infty u_\infty^2 c} = \frac{F_D}{\frac{\gamma}{2}p_\infty M_\infty^2 c}. \quad (\text{E.2})$$

En aérodynamique, les coefficients par unité d'envergure sont généralement dénotés par une lettre minuscule (c_L , c_D) alors que les coefficients pour les profils complets sont représentés par des lettres majuscules (C_L , C_D).

Nous verrons que la traînée qui apparaît en écoulement compressible n'est pas un phénomène visqueux mais lié aux phénomènes de propagation d'ondes : on l'appelle ainsi la traînée d'onde et résulte

d'une distribution de pression asymétrique sur le profil. Elle n'existe donc que dans les écoulements compressibles et seulement si la portance est non nulle. En fait, on l'appelle aussi traînée due à la portance. Il ne faut pourtant pas confondre ce phénomène avec celui de la traînée induite rencontrée dans les écoulements tridimensionnels de fluides incompressibles, phénomène qui existe aussi pour les écoulements compressibles tridimensionnels.

E.1.2 Écoulement autour d'une plaque plane

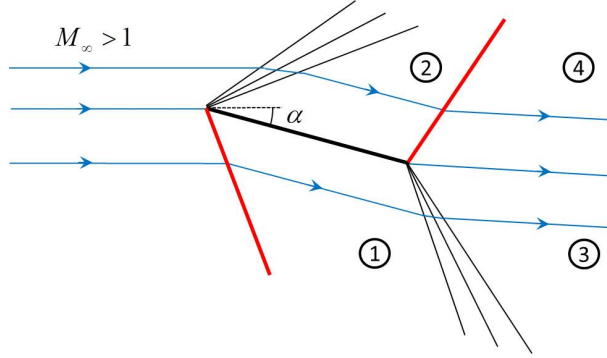


FIGURE E.2 – Plaque plane dans un écoulement supersonique

Considérons une plaque plane, d'envergure infinie, inclinée d'un angle α par rapport à la vitesse \mathbf{u}_∞ amont d'un écoulement supersonique de nombre de Mach M_∞ . On suppose que l'angle d'incidence est suffisamment petit pour que l'écoulement reste supersonique de part et d'autre du profil. A l'intrados, partie inférieure de la plaque, l'écoulement s'ajuste après une rotation d'angle α au moyen d'une onde de choc oblique (solution faible). L'angle α doit être inférieur à l'angle de déviation maximum correspondant au nombre de Mach M_∞ pour un choc attaché. De même, sur l'extrados, partie supérieure du profil, l'écoulement s'adapte après une détente d'un angle α due à une détente de Prandtl-Meyer. L'évolution de l'écoulement se présente selon la figure E.2.

On a ainsi, sur l'extrados, une onde de détente centrée au bord d'attaque suivie d'une onde de choc attachée au bord de fuite. Sur l'intrados le fluide traverse d'abord l'onde de choc oblique attachée au bord d'attaque et ensuite une onde de détente centrée au bord de fuite. Les déviations étant connues à travers les chocs et les ondes de détente, comme on suppose connues les conditions de l'écoulement amont, il est facile à partir des relations des chocs obliques et les relations de Prandtl-Meyer de déterminer les conditions de l'écoulement en 1 et 2 et en particulier les nombres de Mach M_1 et M_2 , ainsi que les pressions p_1 et p_2 .

Sur l'extrados (intrados), la pression sur la plaque est uniforme et égale à p_2 (p_1). Il en résulte une force \mathbf{F} perpendiculaire à la plaque. Comme $p_2 < p_1$, il y aura une force de portance positive et une traînée d'onde sur la plaque respectivement données par

$$F_L = (p_1 - p_2) c \cdot \cos \alpha, \quad (\text{E.3})$$

$$F_D = (p_1 - p_2) c \cdot \sin \alpha, \quad (\text{E.4})$$

dont on déduit les coefficients de portance et de traînée

$$c_L = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left(\frac{p_1}{p_\infty} - \frac{p_2}{p_\infty} \right) \cos \alpha \quad (\text{E.5})$$

$$c_D = c_L \tan \alpha. \quad (\text{E.6})$$

Il suffit donc de déterminer les rapport de pression p_1/p_∞ et p_2/p_∞ qui ne dépendent que de γ et du nombre de Mach M_∞ pour calculer la portance et la traînée d'onde. Si l'angle α est nul $p_1 = p_2$ et par suite la portance est nulle. Si $\alpha \neq 0$ comme la portance n'est pas nulle, la traînée d'onde existe et ne dépend que de la portance.

Une remarque importante concerne l'écoulement en aval du profil, dans les régions 3 et 4. Tout d'abord, les conditions dans ces régions n'influencent pas la force agissant sur le profil (comme on l'a vu).

D'autre part, les écoulements en région 3 et en 4, qui se doivent d'être parallèles, ne le sont cependant pas avec l'écoulement en amont du profil. La condition que la pression p_3 soit égale à p_4 (et que les écoulements soit parallèles) permet de résoudre le problème et déterminer l'angle de l'écoulement.

E.1.3 Écoulement autour d'un profil en losange

Considérons maintenant un profil d'épaisseur non nulle de corde c . Pour simplifier, on prendra un profil symétrique en forme de losange, formé de quatre cotés identiques de longueur $c/2 \cos \delta$, où δ est le demi angle d'ouverture du losange. On supposera que l'angle d'attaque α est nul.

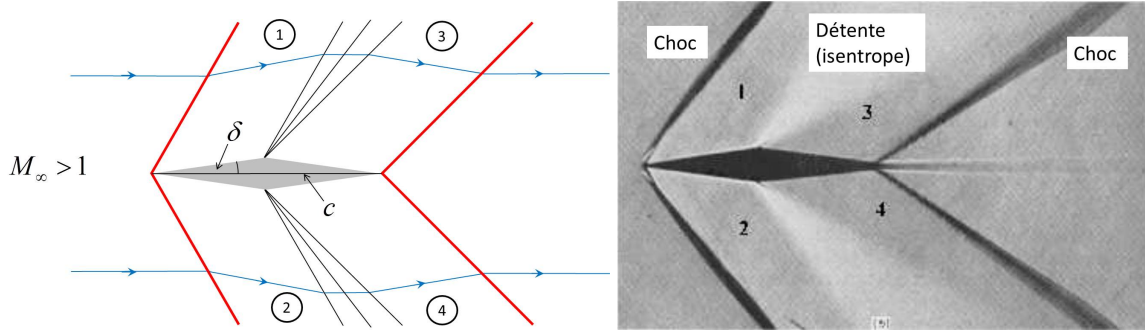


FIGURE E.3 – Profil en losange aligné avec l'écoulement

Par conséquent, il n'y a pas de portance et la trainée d'onde due à la portance est aussi nulle. Pourtant la trainée n'est pas nulle. En effet, $p_1 = p_2 > p_3 = p_4$. Calculons en effet, la trainée due à chaque plaque plane formant le corps. En considérant la symétrie de l'écoulement à angle d'incidence nul, nous avons

$$F_{D,1} = F_{D,2} = p_1 \frac{c/2}{\cos \delta} \sin \delta, \quad (\text{E.7})$$

ainsi que

$$F_{D,3} = F_{D,4} = -p_3 \frac{c/2}{\cos \delta} \sin \delta, \quad (\text{E.8})$$

et par conséquent

$$F_D = F_{D,1} + F_{D,2} + F_{D,3} + F_{D,4} = c(p_1 - p_3) \tan \delta. \quad (\text{E.9})$$

Puis, on obtient le coefficient de trainée

$$c_D = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left(\frac{p_1}{p_\infty} - \frac{p_3}{p_\infty} \right) \tan \delta. \quad (\text{E.10})$$

Le rapport $\frac{p_1}{p_\infty}$ est le rapport de pression statique à travers le choc oblique tandis que le rapport $\frac{p_3}{p_1}$ est le rapport de pression à travers la détente de Prandtl-Meyer. La trainée est due ici uniquement à l'épaisseur non nulle du profil, qui intervient dans la relation par l'intermédiaire de l'angle du dièdre δ . C'est la *trainée d'onde due à l'épaisseur*.

E.2 Écoulements supersoniques en sortie de tuyère

E.2.1 Écoulements en sortie

La tuyère d'un avion supersonique ou d'une fusée est dessinée de manière à fonctionner sans choc (ni dans la tuyère ni dans le sillage) pour une certaine altitude au dessus du niveau de la mer. Cependant, selon l'altitude ou la configuration de la tuyère, différentes morphologie de l'écoulement peuvent se présenter.

Or, en particulier au niveau de la mer, la tuyère est *sur-détendue* (*over-expanded*), c'est-à-dire que la pression à la sortie des gaz est plus faible que la pression ambiante (ou arrière). Cela a pour conséquence la génération d'un choc (généralement oblique) à la sortie de la tuyère. Pour atteindre la pression ambiante,

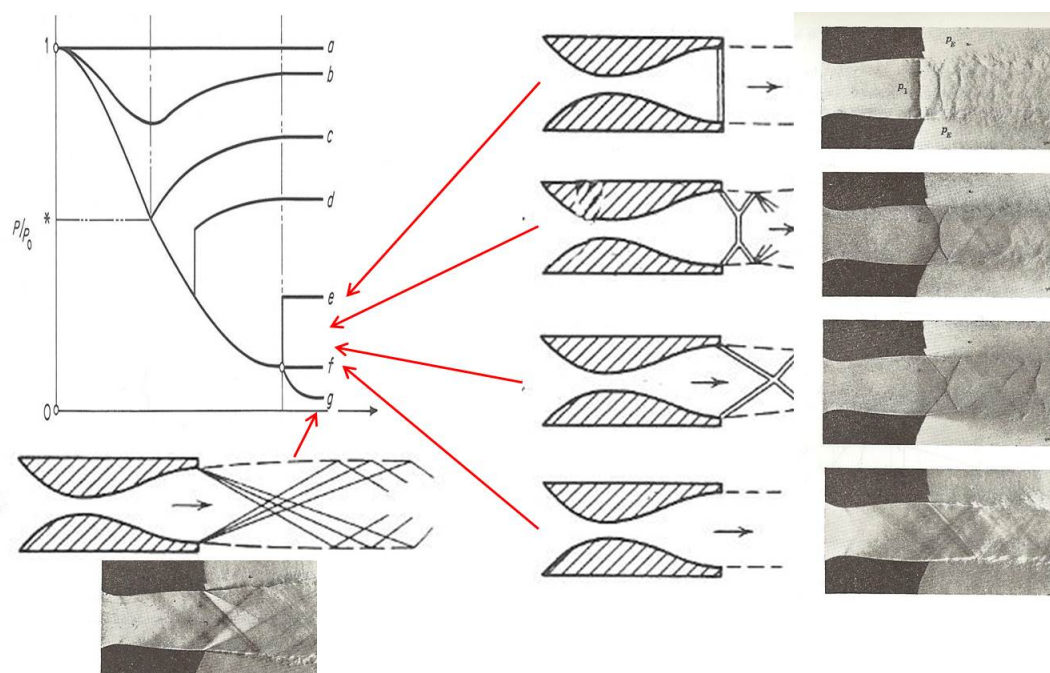


FIGURE E.4 – Morphologie de l'écoulement en sortie de tuyère

le gaz subit une compression lorsqu'il traverse le choc. Il subit alors une déviation vers l'axe de symétrie de la tuyère (cas entre *e* et *f* sur la Figure E.4).

En altitude, la pression en sortie est généralement plus grande que la pression ambiante : la tuyère est alors *sous-détendue* (*under-expanded*). Afin de permettre à l'écoulement de se retrouver en équilibre avec la pression ambiante, une onde de détente (Prandtl-Meyer) se forme en sortie et permet de détendre l'écoulement (cas *g* sur la Figure E.4). L'écoulement est alors dévié vers l'extérieur, élargissant ainsi la taille du sillage. Cette morphologie est très commune sur les clichés de fusées prises à très hautes altitudes.

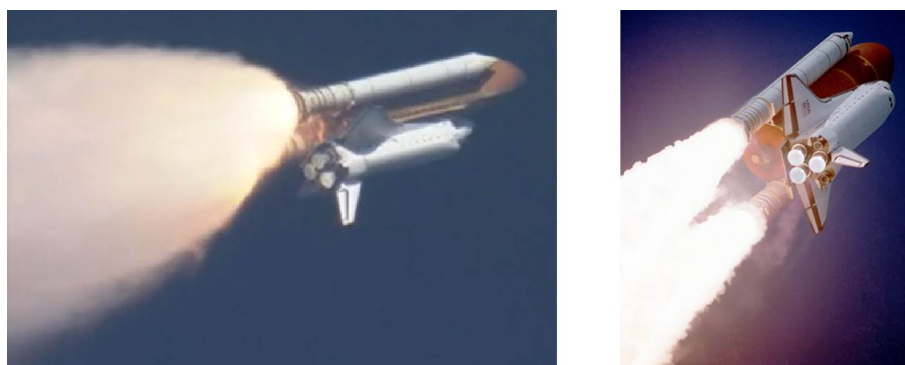


FIGURE E.5 – Sillage d'une tuyère sous-détendue (à gauche, pour la tuyère solide de la Navette Spatiale en haute altitude) par rapport au sillage en basse altitude (à droite, qui peut être sur-détendue ou au point de fonctionnement)

E.2.2 Sillage des tuyères

Les sillages des tuyères supersoniques peuvent présenter des motifs très esthétiques. Ces sillages résultent d'une réflexion des ondes de choc et de détente sur l'axe du jet ainsi que le long de la surface libre ou couche de cisaillement (*shear layer*), qui correspond à l'interface entre le jet et le milieu ambiant.

Tuyère sur-détendue (over-expanded) Pour une tuyère sur-détendue, si une onde de choc apparaît sous forme de choc oblique, cette onde de choc converge vers l'axe du jet. L'onde de choc sera réfléchi, soit normalement soit par création d'un disque (ou choc) de Mach (Figure E.6), selon les conditions de l'écoulement, comme étudié au Chapitre sur les ondes de chocs obliques.

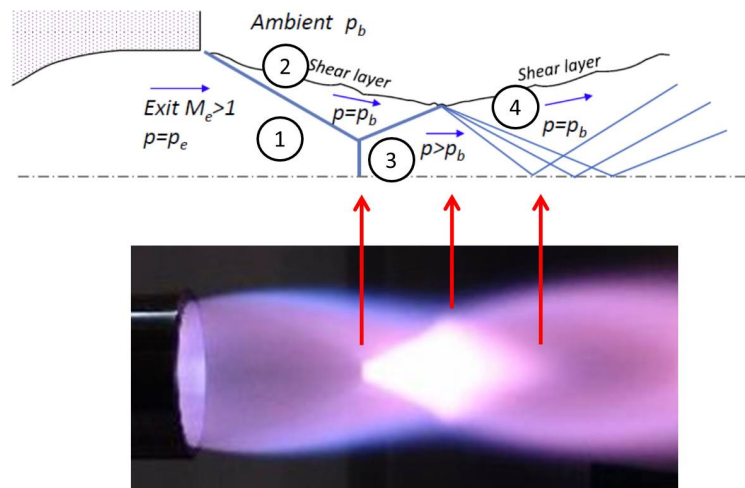


FIGURE E.6 – Tuyère sur-détendue (over-expanded), avec pression de sortie égale à 0.7 bar, inférieure à la pression arrière ou ambiante égale à 1 bar (Swiss Propulsion Laboratory, www.spl.ch).

Le choc réfléchi interagit alors avec la surface libre (Figure E.6). Comme l'écoulement en amont de ce choc oblique (zone 2) est à pression ambiante, l'écoulement en aval (zone 3) sera à une pression plus élevée. Afin de rejoindre la pression ambiante en zone 4, l'écoulement en zone 3 doit être détendu : cela peut se faire à travers une détente de Prandtl-Meyer. De ce fait, *une onde de choc se réfléchit sur une couche de cisaillement en une onde de détente centrée*.

L'onde de détente interagit ensuite avec les ondes de détente provenant des régions opposées (en 2D ou 3D) : l'interaction des ondes de détentes donne naissance à une région appelée non-simple (par opposition à une région simple ne faisant intervenir qu'un seul faisceau d'ondes de détente). La méthode des caractéristiques permet de résoudre ce genre d'écoulement.

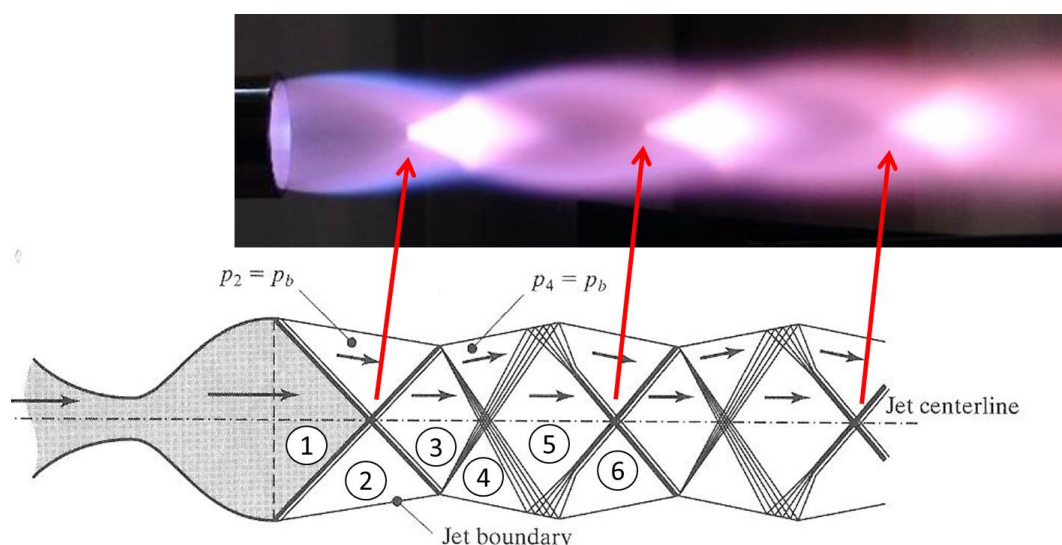


FIGURE E.7 – Sillage de tuyère sur-détendue (Swiss Propulsion Laboratory, www.spl.ch).

Après réflexion de ces ondes de détente sur l'axe, elles interagissent alors avec la couche de cisaillement. Comme l'écoulement en amont de ces ondes de détente (zone 4) est à pression ambiante, il sera détendu

en traversant ces ondes (zone **5**) afin que l'écoulement (en zone **5**) soit parallèle à l'axe (Figure E.7). Afin que l'écoulement puisse revenir à pression ambiante en zone **6**, il doit être comprimé : les ondes de détente doivent donc se réfléchir sur la couche de cisaillement en un faisceau de Prandtl-Meyer de compression. La convergence de ces ondes de compression conduit généralement à une onde de choc oblique (Figure E.7).

Le procédé se répète alors à partir de la réflexion de ces ondes de choc obliques sur l'axe.

Tuyère sous-détendue (underexpanded) Pour une tuyère sous-détendue, l'écoulement en sortie de tuyère est d'abord dévié vers l'extérieur par un faisceau de Prandtl-Meyer permettant à l'écoulement d'être détendu vers la pression ambiante (schéma du haut de la Figure E.8).

Comme dans le cas de la tuyère sur-détendue, ces ondes de détentes se rejoignent sur l'axe et sont redirigées vers la surface libre. Comme l'écoulement en amont de ces ondes réfléchies est à pression ambiante (zone **2**), l'écoulement sera détendu en traversant ces ondes, pour finalement générer un écoulement parallèle à l'axe en zone **3**. Il devra donc être recomprimé vers la pression ambiante (zone **4**) en traversant un faisceau de Prandtl-Meyer de compression (résultant de la réflexion des ondes de détentes sur la surface libre). Ce faisceau de compression devient une onde de choc oblique convergeant vers l'axe du jet.

Le procédé devient alors identique à celui de la tuyère sur-détendue. Il n'y a finalement qu'un déphasage entre les deux formes d'écoulements (Figure E.8). Dans les détails, les écoulements ne sont pas identiques de par la manière dont ils sont engendrés en sortie de tuyère. En particulier, le sillage de la tuyère sous-détendue sera globalement plus large que celui de la tuyère sur-détendue.

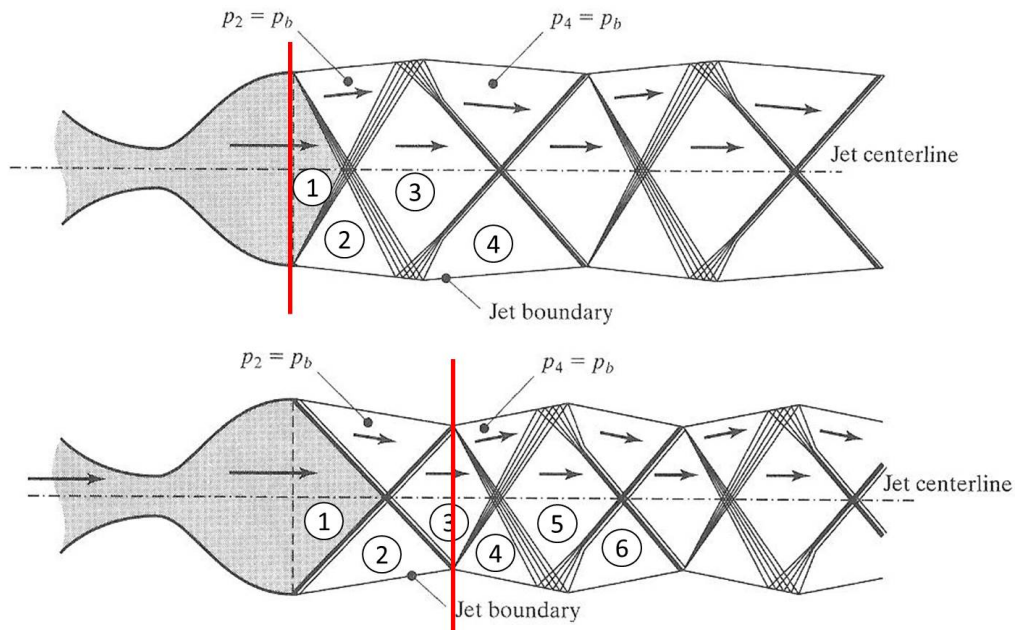


FIGURE E.8 – Sillage de tuyère sous-détendue (haut), et comparaison avec le sillage d'une tuyère sur-détendue (bas).

Annexe F

Formulaire

$$M = \frac{u}{a} \quad (\text{F.1})$$

$$\delta q = de + p dv, \quad (\text{F.2})$$

$$c_p = \left(\frac{\delta q}{dT} \right)_p, \quad (\text{F.3})$$

$$c_v = \left(\frac{\delta q}{dT} \right)_v$$

$$c_v = \left(\frac{\delta q}{dT} \right)_v = \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_v, \quad (\text{F.4})$$

$$c_p = \left(\frac{\delta q}{dT} \right)_p = \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_v + \left(\left(\frac{\partial e}{\partial v} \right)_T + p \right) \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p$$

$$h = e + pv, \quad (\text{F.5})$$

$$c_v = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p + \left(\left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T - v \right) \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v, \quad (\text{F.6})$$

$$c_p = \left(\frac{\delta q}{dT} \right)_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p$$

$$c_p - c_v = \left[p + \left(\frac{\partial e}{\partial v} \right)_T \right] \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p, \quad (\text{F.7})$$

$$c_p - c_v = \left[v - \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T \right] \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v$$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{\left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p}{\left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_v} \quad (\text{F.8})$$

$$\gamma = \frac{f + 2}{f} \quad (\text{F.9})$$

$$\oint \left(\frac{\delta q}{T} \right)_{\text{rév}} = 0. \quad (\text{F.10})$$

$$T ds = de + p dv = dh - v dp. \quad (\text{F.11})$$

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p = \frac{c_p}{T}, \quad (\text{F.12})$$

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T - v \right]$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T = v - T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p, \quad (\text{F.13})$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T &= \frac{1}{\rho} + \frac{T}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \\ \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v &= \frac{1}{T} \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_v = \frac{c_v}{T}, \end{aligned} \quad (\text{F.14})$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T &= \frac{1}{T} \left(p + \left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)_T\right) \\ \left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)_T &= T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v - p, \end{aligned} \quad (\text{F.15})$$

$$\left(\frac{\partial e}{\partial \rho}\right)_T = \frac{1}{\rho^2} \left[p - T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho\right]$$

$$\Delta s = \int_1^2 \frac{c_v}{T} dT + \int_1^2 \frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)_T + p\right] dv = \int_1^2 \frac{c_v}{T} dT + \int_1^2 \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v dv \quad (\text{F.16})$$

$$p = nkT = \left(\frac{n}{N_A} \mathcal{M}\right) \left(\frac{kN_A}{\mathcal{M}}\right) T = \rho r T \quad (\text{F.17})$$

n	: nombre d'atomes/molécules par unité de volume		$[\text{m}^{-3}]$
k	: constante de Boltzmann	$1.3806488 \cdot 10^{-23}$	$[\text{J} \cdot \text{K}^{-1}]$
$\mathcal{R} = kN_A$: constante des gaz parfaits	8.3144621	$[\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}]$
\mathcal{M}	: masse molaire		$[\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}]$
N_A	: constante d'Avogadro	$6.02214129 \cdot 10^{23}$	$[\text{mol}^{-1}]$
$\frac{n}{N_A} \mathcal{M} = \rho$: masse volumique		$[\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}]$
$r = \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}}$: constante molaire des gaz parfaits		$[\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}]$

$$e = \int c_v(T) dT + \text{const} \quad (\text{F.18})$$

$$e = c_v T + \text{const} \quad (\text{F.19})$$

$$h = \int c_p(T) dT + \text{const} \quad (\text{F.20})$$

$$h = c_p T + \text{const} \quad (\text{F.21})$$

$$c_p - c_v = r \quad (\text{F.22})$$

$$c_p = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} \quad \text{et} \quad c_v = \frac{r}{\gamma - 1} \quad (\text{F.23})$$

$$\Delta s = c_p \ln \left(\frac{T_2}{T_1}\right) - r \ln \left(\frac{p_2}{p_1}\right) \quad (\text{F.24})$$

$$\Delta s = c_v \ln \left(\frac{T_2}{T_1}\right) + r \ln \left(\frac{v_2}{v_1}\right) \quad (\text{F.25})$$

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad \text{et} \quad \left(\frac{p_2}{p_1}\right) = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{-\gamma} \quad (\text{F.26})$$

$$p = \text{const} \cdot \rho^\gamma \quad (\text{F.27})$$

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \gamma r T \quad (\text{F.28})$$

$$\alpha_T = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T \quad \text{et} \quad \alpha_s = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_s \quad (\text{F.29})$$

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right] dV = 0 \quad (\text{F.30})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (\text{F.31})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \mathbf{u} dV + \int_S \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = - \int_S p \mathbf{n} dS + \int_V \nabla \cdot \mathbf{T} dV + \int_V \rho \mathbf{f} dV \quad (\text{F.32})$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{f} \quad (\text{F.33})$$

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{f} \quad (\text{F.34})$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \frac{u^2}{2} - \mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f} \quad (\text{F.35})$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega} = -\nabla h_0 + T \nabla s + \mathbf{f} \quad (\text{F.36})$$

$$h_0 = h + \frac{u^2}{2} \quad (\text{F.37})$$

$$e_0 = e + \frac{1}{2} u^2 \quad (\text{F.38})$$

$$\rho \frac{De_0}{Dt} = \frac{\partial (\rho e_0)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e_0 \mathbf{u}) = -\nabla \cdot (p \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}) + \rho (\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + r \quad (\text{F.39})$$

$$\rho \frac{Dh_0}{Dt} = \frac{\partial (\rho h_0)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho h_0 \mathbf{u}) = \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}) + \rho (\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + r \quad (\text{F.40})$$

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = T \left[\frac{\partial (\rho s)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho s \mathbf{u}) \right] = \mathbf{T} : \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} + r \quad (\text{F.41})$$

$$\mu = \sin^{-1} \frac{1}{M} \quad (\text{F.42})$$

$$\frac{u^2}{2} + \int \frac{1}{\rho} dp = C \quad (\text{F.43})$$

$$\Gamma = \frac{a^4}{2v^3} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2} \right)_s \quad (\text{F.44})$$

$$\frac{du}{u} = \frac{dM/M}{1 + (\Gamma - 1)M^2} \quad (\text{F.45})$$

$$\frac{u^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} = C \quad (\text{F.46})$$

Fluide	Γ
Gas Parfait	$(\gamma + 1)/2$
Liquide de Tait	$(k + 1)/2$
Eau	4.4
Ethanol	6.4

TABLE F.1 – Valeurs de la dérivée fondamentale Γ à 1 Atm et 293.15 K.

$$c_p T + \frac{u^2}{2} = c_p T_0 \quad (\text{F.47})$$

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \left(\frac{u}{a} \right)^2 = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \quad (\text{F.48})$$

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (\text{F.49})$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \quad (\text{F.50})$$

$$\frac{u^2 - a_*^2}{2} = \frac{a_*^2 - a^2}{\gamma - 1} \quad (\text{F.51})$$

$$\frac{T_*}{T_0} = \frac{2}{\gamma + 1}, \quad \frac{p_*}{p_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}, \quad \frac{\rho_*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \quad (\text{F.52})$$

γ	Monoatomique $5/3 = 1.667$	Diatomique $7/5 = 1.4$	$9/7 = 1.286$
T_*/T_0	0.7499	0.8333	0.8750
p_*/p_0	0.4871	0.5283	0.5483
ρ_*/ρ_0	0.6495	0.6339	0.6267

$$M_* = \frac{u}{a_*} \quad (\text{F.53})$$

$$M_*^2 = \frac{(\gamma + 1) M^2}{2 + (\gamma - 1) M^2} \quad (\text{F.54})$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -M^2 \frac{du}{u} \quad (\text{F.55})$$

$$\frac{dA}{A} = (M^2 - 1) \frac{du}{u} \quad (\text{F.56})$$

$$\frac{dA}{A} = -\frac{M^2 - 1}{\gamma M^2} \frac{dp}{p} \quad (\text{F.57})$$

$$\frac{dA}{A} = \frac{M^2 - 1}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \frac{dM}{M} \quad (\text{F.58})$$

$$\frac{da}{a} = -\frac{\gamma - 1}{2} M^2 \frac{du}{u} \quad (\text{F.59})$$

$$\frac{du}{u} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \frac{dM}{M}. \quad (\text{F.60})$$

$$\frac{A}{A_*} = \frac{1}{M} \left[\frac{2}{\gamma+1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)} \quad (\text{F.61})$$

$$\dot{m} = \rho u A \quad (\text{F.62})$$

$$\frac{a_0 \dot{m}}{p_0 A} = \gamma M \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}. \quad (\text{F.63})$$

$$\frac{\dot{m}}{\rho_0 a_0 A} = M \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}. \quad (\text{F.64})$$

$$\dot{m} = A \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \frac{p_0}{\sqrt{rT_0}} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \quad (\text{F.65})$$

$$\frac{\dot{m} \sqrt{rT_0}}{p_0 A} = \sqrt{\gamma} M \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (\text{F.66})$$

$$\frac{\dot{m} \sqrt{rT_0}}{p_0 A} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \quad (\text{F.67})$$

$$\frac{\dot{m}_* \sqrt{rT_0}}{p_0 A_*} = \sqrt{\gamma} \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (\text{F.68})$$

$$\frac{p_*}{p_0} = \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (\text{F.69})$$

γ	Monoatomique 5/3 = 1.667	Diatomique 7/5 = 1.4	9/7 = 1.286
$\frac{\dot{m}_* \sqrt{rT_0}}{p_0 A_*}$	0.7262	0.6847	0.6647
$\frac{p_*}{p_0}$	0.4871	0.5283	0.5483

$$dp = \rho a du \quad (\text{F.70})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u+a) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\text{F.71})$$

$$\frac{dx}{dt} = u + a = a_0 + \frac{\gamma+1}{2} u \quad (\text{F.72})$$

$$\rho_1 w_{n,1} = \rho_2 w_{n,2} \quad (\text{F.73})$$

$$p_1 + \rho_1 w_{n,1}^2 = p_2 + \rho_2 w_{n,2}^2 \quad (\text{F.74})$$

$$h_1 + \frac{w_{n,1}^2}{2} = h_2 + \frac{w_{n,2}^2}{2} \quad (\text{F.75})$$

$$w_{n,1}w_{n,2} = \frac{[p]}{[\rho]} \quad (\text{F.76})$$

$$j = \rho_1 w_{n,1} = \rho_2 w_{n,2} \quad (\text{F.77})$$

$$j^2 = -\frac{[p]}{[v]} \quad (\text{F.78})$$

$$M_{n,1} \equiv \frac{w_{n,1}}{a_1} \quad (\text{F.79})$$

$$\Pi = \frac{[p]}{\rho_1 a_1^2} = -M_{n,1} \frac{[w_n]}{a_1} = -M_{n,1}^2 \frac{[v]}{v_1} \quad (\text{F.80})$$

$$[w_n]^2 = -[p][v] \quad (\text{F.81})$$

$$h_2 - h_1 = \frac{p_2 - p_1}{2} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \quad (\text{F.82})$$

$$\frac{T_1[s]}{a_1^2} = \frac{1}{6} \Gamma_1 \Pi^3 + O(\Pi^4) \quad (\text{F.83})$$

$$M_{n,2}^2 = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{n,1}^2}{\gamma M_{n,1}^2 - \frac{\gamma-1}{2}} \quad (\text{F.84})$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2}{\gamma+1} \left(\gamma M_{n,1}^2 - \frac{\gamma-1}{2} \right) = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_{n,1}^2 - 1) \quad (\text{F.85})$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{h_2}{h_1} = \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^2 \frac{1}{M_{n,1}^2} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{n,1}^2 \right) \left(\gamma M_{n,1}^2 - \frac{\gamma-1}{2} \right) \quad (\text{F.86})$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{w_{n,1}}{w_{n,2}} = \frac{\gamma+1}{2} \frac{M_{n,1}^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{n,1}^2} \quad (\text{F.87})$$

$$\frac{p_{0,2}}{p_{0,1}} = \frac{\rho_{0,2}}{\rho_{0,1}} = \frac{\left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} M_{n,1}^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{n,1}^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(\gamma M_{n,1}^2 - \frac{\gamma-1}{2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}} \quad (\text{F.88})$$

$$s_2 - s_1 = s_{0,2} - s_{0,1} = c_p \ln \left[\frac{T_{0,2}}{T_{0,1}} \right] - r \ln \left[\frac{p_{0,2}}{p_{0,1}} \right] = -r \ln \left[\frac{p_{0,2}}{p_{0,1}} \right] \quad (\text{F.89})$$

$$\frac{p_{0,2}}{p_{0,1}} = \exp^{-\frac{(s_2 - s_1)}{r}}. \quad (\text{F.90})$$

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \left\{ \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_{n,1}^2 - 1) \right] \left[1 - \frac{2}{\gamma+1} \frac{M_{n,1}^2 - 1}{M_{n,1}^2} \right]^\gamma \right\} \quad (\text{F.91})$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} - \frac{2\gamma}{\gamma-1}}{1 - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{\rho_1}{\rho_2}} = f \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \quad (\text{F.92})$$

$$w_{n,1}w_{n,2} = a_*^2 \quad (\text{F.93})$$

$$p_{0,1} A_{*,1} = p_{0,2} A_{*,2} \quad (\text{F.94})$$

$$M_{n,1} = M_1 \sin \theta \quad (\text{F.95})$$

$$M_{n,2} = M_2 \sin(\theta - \delta) \quad (\text{F.96})$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2}{\gamma + 1} \left(\gamma M_1^2 \sin^2 \theta - \frac{\gamma - 1}{2} \right) = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 \sin^2 \theta - 1) \quad (\text{F.97})$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{w_{n,1}}{w_{n,2}} = \frac{\gamma + 1}{2} \frac{M_1^2 \sin^2 \theta}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \sin^2 \theta} \quad (\text{F.98})$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{\rho_1}{\rho_2} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^2 \frac{1}{M_1^2 \sin^2 \theta} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \sin^2 \theta \right) \left(\gamma M_1^2 \sin^2 \theta - \frac{\gamma - 1}{2} \right) \quad (\text{F.99})$$

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \left\{ \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 \sin^2 \theta - 1) \right] \left[1 - \frac{2}{\gamma + 1} \frac{M_1^2 \sin^2 \theta - 1}{M_1^2 \sin^2 \theta} \right]^\gamma \right\}, \quad (\text{F.100})$$

$$M_2^2 = \frac{1}{\sin^2(\theta - \delta)} \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \sin^2 \theta}{\gamma M_1^2 \sin^2 \theta - \frac{\gamma - 1}{2}} \quad (\text{F.101})$$

$$\tan \delta = 2 \cot \theta \frac{M_1^2 \sin^2 \theta - 1}{M_1^2 (\gamma + \cos 2\theta) + 2} \quad (\text{F.102})$$

$$d\delta = -\sqrt{M^2 - 1} \frac{dw}{w} \quad (\text{F.103})$$

$$\nu(M) \equiv \int_1^M \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \frac{dM}{M} \quad (\text{F.104})$$

$$\nu(M) = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \arctan \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} (M^2 - 1)} - \arctan \sqrt{M^2 - 1} \quad (\text{F.105})$$

$$\nu(M_2) = \nu(M_1) - \delta \quad (\text{F.106})$$

$$c_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2} \rho_\infty u_\infty^2 c} = \frac{F_L}{\frac{\gamma}{2} p_\infty M_\infty^2 c} \quad (\text{F.107})$$

$$c_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho_\infty u_\infty^2 c} = \frac{F_D}{\frac{\gamma}{2} p_\infty M_\infty^2 c} \quad (\text{F.108})$$

$$F_L = (p_1 - p_2) c \cdot \cos \alpha \quad (\text{F.109})$$

$$F_D = (p_1 - p_2) c \cdot \sin \alpha \quad (\text{F.110})$$

$$c_L = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left(\frac{p_1}{p_\infty} - \frac{p_2}{p_\infty} \right) \cos \alpha \quad (\text{F.111})$$

$$c_D = c_L \tan \alpha \quad (\text{F.112})$$

$$F_{D,1} = F_{D,2} = p_1 \frac{c/2}{\cos \delta} \sin \delta \quad (\text{F.113})$$

$$F_{D,3} = F_{D,4} = -p_3 \frac{c/2}{\cos \delta} \sin \delta \quad (\text{F.114})$$

$$F_D = F_{D,1} + F_{D,2} + F_{D,3} + F_{D,4} = c(p_1 - p_3) \tan \delta \quad (\text{F.115})$$

$$c_D = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left(\frac{p_1}{p_\infty} - \frac{p_3}{p_\infty} \right) \tan \delta \quad (\text{F.116})$$

$$\frac{1}{R_n} = \frac{1}{\Delta n} \frac{\partial \Delta n}{\partial \ell} = \frac{\partial \vartheta}{\partial n} \quad (\text{F.117})$$

$$\frac{1}{R_l} = -\frac{1}{\Delta \ell} \frac{\partial \Delta \ell}{\partial n} = \frac{\partial \vartheta}{\partial \ell} \quad (\text{F.118})$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \ell} + \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial \ell} + \frac{\partial \vartheta}{\partial n} = 0 \quad (\text{F.119})$$

$$(M^2 - 1) \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial \ell} - \frac{\partial \vartheta}{\partial n} = 0 \quad (\text{F.120})$$

$$-\frac{\partial u}{\partial n} + u \frac{\partial \vartheta}{\partial \ell} = 0 \quad (\text{F.121})$$

$$u^2 \frac{\partial \vartheta}{\partial \ell} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad (\text{F.122})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \ell} + \tan \mu \frac{\partial}{\partial n} \right) (\nu - \vartheta) = 0 \quad (\text{F.123})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \ell} - \tan \mu \frac{\partial}{\partial n} \right) (\nu + \vartheta) = 0 \quad (\text{F.124})$$

$$\frac{d}{dm^-} (\nu - \vartheta) = 0 \quad (\text{F.125})$$

$$\frac{d}{dm^+} (\nu + \vartheta) = 0 \quad (\text{F.126})$$